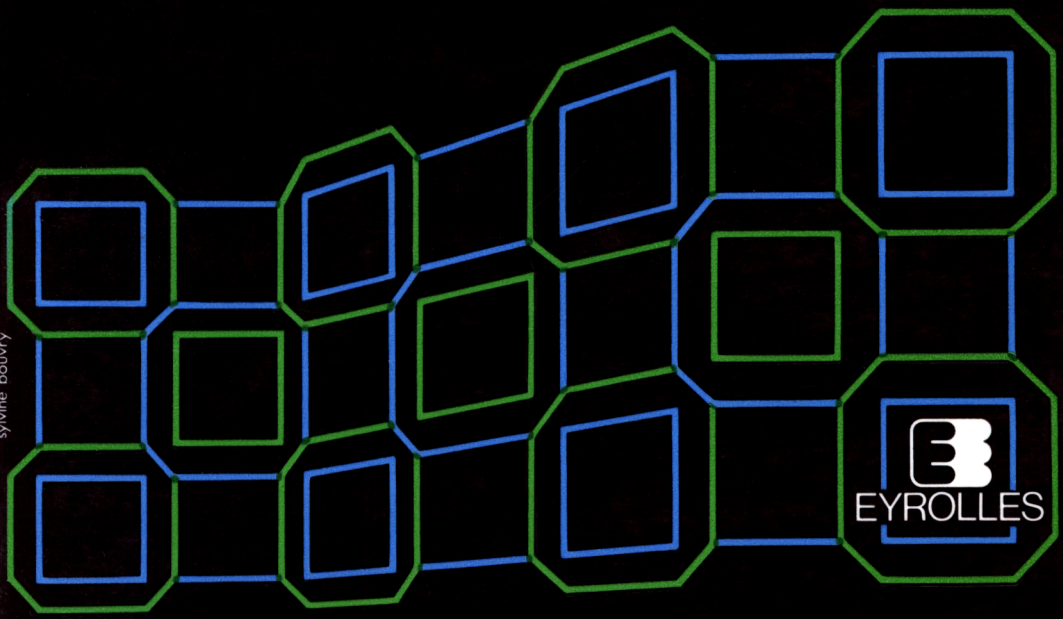
LES DOSSIERS DE LA CONSTRUCTION

CALCUL DES STRUCTURES EN BASIC

B. ASANCHEYEV



EYROLLES

CALCUL DES STRUCTURES EN BASIC

LES DOSSIERS DE LA CONSTRUCTION
Collection dirigée par Victor DAVIDOVICI

CONCEPTION GÉNÉRALE

HAVARD Michel et COLLAS Jean - *Guide de géotechnique - Lexique et essais.*

STRUCTURES

BOUTIN Jean-Pierre - *Pratique du calcul de la résistance au feu des structures en béton.*

KAVYRCHINE Michel - *Les assemblages dans les structures en béton.*

ÉQUIPEMENT

LARTIGUE Didier et VIRIQUE Bernard - *Le chauffage électrique des bâtiments d'habitation.*

INFORMATIQUE APPLIQUÉE

SOCOTEC - *Calculs de béton armé sur HP 41.*

CAPRA Alain et HAUTCOEUR Michel - *Modélisation des structures sur ordinateur.*

DRIAY Jean-Jacques, AZEMA Jean-Marc, CHAPRON Eliane, MAHE Patrice, SÉNÉCHAL Roman - *CAO. De la conception à la construction, tout un programme.*

AUBOIN Jean-François - *Calcul des structures et informatique.*

HADDADI Abdelkader - *Calcul des structures sur PC 1500/PC 2 - Résistance des matériaux - Béton armé - Construction métallique (*).*

LEYS Philippe - *Programmes d'acoustique sur HP 41.*

ASANCHEYEY Boris - *Calcul des structures en Basic.*

GESTION

ABADIE Jean-Pierre - *PME-Artisan : comment établir le diagnostic et le plan de financement de votre entreprise.*

(*) LOGILIVRE *«Calcul des structures sur PC 1500/PC 2* (Programmes enregistrés sur cassette).

LES DOSSIERS DE LA CONSTRUCTION

INFORMATIQUE APPLIQUÉE

CALCUL DES STRUCTURES EN BASIC

Boris ASANCHEYEV

Professeur à l'ESTP et à l'ENTPE
Maître de Conférence à l'ENPC
Ingénieur en Chef du Service Structures
à OTH SPÉCIALISTES

EYROLLES

61, boulevard Saint-Germain — 75005 Paris
1984

Si vous désirez être tenu au courant de nos publications, il vous suffit d'adresser votre carte de visite au :

Service «Presse», Éditions EYROLLES
61, Boulevard Saint-Germain,
75240 PARIS CEDEX 05,

en précisant les domaines qui vous intéressent. Vous recevrez régulièrement un avis de parution des nouveautés en vente chez votre libraire habituel.

«La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les «copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collectives» et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, «toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite» (alinéa 1 de l'article 40)».

«Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal».

© Editions EYROLLES, 1984

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION IX

1 - Considérations préliminaires IX
2 - Choix des problèmes traités X
3 - Programmation XI
4 - Organigrammes XII

1 - PRÉSENTATION 1

1.1 - Rappel sommaire de la méthode des déplacements 1
1.2 - Degrés de liberté 2
1.3 - Définitions relatives aux nœuds 4
1.4 - Définitions relatives aux éléments 5
1.5 - Le système linéaire global 6
1.6 - Mémoire auxiliaire 6
1.7 - Charges extérieures 7

2 - LES SOUS-PROGRAMMES GÉNÉRAUX 9

2.1 - Le programme principal 9
2.2 - Rangement de la matrice par ligne-de-ciel 11
2.3 - Calcul des indices des degrés de liberté bloqués 12
2.4 - Calcul des hauteurs de colonnes 14
2.5 - Calcul des indices des termes diagonaux 16
2.6 - Assemblage de la matrice du système linéaire 18
2.7 - Calcul des adresses et injection dans la matrice globale 19

2.8 - Charges nodales dues aux déplacements d'appuis 22
2.9 - Prise en compte des appuis de la structure 26
2.10 - Résolution du système linéaire 28

3 - LES OSSATURES PLANES ET SPATIALES 39

3.1 - Généralités sur les ossatures 39
3.2 - Le programme principal 39
3.3 - Lecture des données 43
3.4 - Reproduction des données 46
3.5 - Calcul des principales caractéristiques des barres 48
3.6 - Matrice de rigidité d'une barre dans le plan 50
3.7 - Matrice de rigidité d'une barre dans l'espace 52
3.8 - Définition des charges 56
3.9 - Charges nodales d'origine thermique 62
3.10 - Impression des déplacements 64
3.11 - Efforts et réactions d'appuis 65
3.12 - Exemple de calcul d'une ossature plane 69
3.13 - Exemple de calcul d'une ossature spatiale 75

4 - LES POUTRES CONTINUES 83

4.1 - Généralités 83
4.2 - Définition des données et notations 84
4.3 - Lecture des données 89
4.4 - Reproduction des données 90
4.5 - Matrice de rigidité d'un élément de poutre en flexion 92
4.6 - Formation de la matrice de rigidité sous forme standard 98
4.7 - Charges en travées 99
4.8 - Définition des chargements 104
4.9 - Impression des déplacements 112
4.10 - Efforts et réactions d'appui 113
4.11 - Exemple de calcul d'une poutre continue 116

5 - ÉLASTICITÉ PLANE 121

5.1 - Bases théoriques 121
5.2 - Approximation des fonctions de déplacement 122
5.3 - Matrice de rigidité d'un élément triangulaire 123
5.4 - Programme principal 125
5.5 - Lecture des données 128
5.6 - Reproduction des données 130
5.7 - Matrice 'B' et matrice d'élasticité 'D' 131
5.8 - Matrice de rigidité de l'élément 134
5.9 - Définition des charges 137
5.10 - Charges nodales équivalentes aux effets thermiques 139

5.11 - Impression des déplacements 142
5.12 - Calcul des contraintes et des réactions d'appuis 143
5.13 - Exemple 149

6 - INERTIE DE TORSION 151

6.1 - Bases théoriques 151
6.2 - Equilibre d'un petit élément triangulaire de membrane 152
6.3 - Le programme principal 156
6.4 - Lecture des données 159
6.5 - Reproduction des données 160
6.6 - Formation de la matrice de rigidité de l'élément 161
6.7 - Le sous-programme 'Matrig' 163
6.8 - Génération du second membre 164
6.9 - Calcul des contraintes de cisaillement et de l'inertie de torsion 165
6.10 - Exemple : section circulaire 168

7 - ANNEXES 173

7.1 - Alternative concernant les conditions aux limites 173
7.2 - Indications sur les espaces mémoires nécessaires 175
7.3 - Références et sources 177

INTRODUCTION

1. CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES

L'évolution de l'informatique conduit naturellement à l'utilisation de l'ordinateur pour la résolution des problèmes de Résistance des Matériaux. Le présent a pour objectifs :

– Rappeler quelques résultats pragmatiques concernant les structures, sans revenir sur les théories de base qui sont exposées dans de nombreux ouvrages.

– Présenter les modules de calcul correspondants dans un langage de programmation facilement adaptable sur différents micro-ordinateurs.

C'est aussi une initiation au calcul automatique des structures, discipline qui a eu un essor particulier dans les dernières décennies, et qui est au confluent de la Résistance des Matériaux, de l'Analyse Numérique et de l'Informatique. Le développement de la micro-informatique a rendu possible la solution de problèmes qui nécessitaient auparavant des moyens puissants et le calcul des structures va se vulgariser.

Si la majorité des projeteurs utilisera des programmes achetés à des sociétés de services, dont le coût ne fera que décroître avec le

temps, il est néanmoins souhaitable de savoir sur quels principes sont bâtis ces programmes, ce qui permet d'éviter bien souvent des erreurs lors de leur exploitation. Il est aussi parfois utile de savoir écrire un programme spécifique mieux adapté à ses besoins ou à ses habitudes de travail. Le présent opuscule pourra alors être utile.

2. CHOIX DES PROBLÈMES TRAITÉS

Nous avons choisi quelques problèmes classiques fréquemment rencontrés en Génie Civil, et dont la solution est donnée par la méthode des matrices de rigidité.

1. Le calcul des ossatures planes ou spatiales. Ce sont des structures composées de barres travaillant uniquement à l'effort normal.

2. Le calcul des poutres continues. Le programme est déduit du programme d'ossatures avec un minimum de modifications.

3. La résolution des problèmes d'élasticité plane à l'aide d'éléments finis triangulaires (les plus simples).

4. La répartition des contraintes de cisaillement et l'inertie de torsion pour une barre soumise à un moment de torsion. Ce problème se ramène à l'étude d'une structure grâce à l'analogie de membrane. Il est traité à l'aide d'éléments triangulaires.

Le lecteur ayant bien assimilé l'organisation générale du programme pourra l'adapter sans trop de difficultés aux portiques plans, aux portiques spatiaux, aux structures plan-spatial, aux dalles et aux coques.

Il pourra également développer les programmes présentés suivant deux voies diamétralement opposées : création d'un superprogramme unique, pour intégration de tous les modules nécessaires, ou au contraire simplification et spécialisation pour des usages bien précis. Par exemple, un programme de calcul d'ossatures ne traitant qu'un seul cas de charge constitué par des forces nodales comportera beaucoup moins d'instructions et pourra résoudre des structures plus importantes.

3. PROGRAMMATION

Les programmes présentés sont écrits en BASIC pour micro-ordinateur HP 9845. Nous avons recherché une présentation aussi claire que possible, étayée par de nombreux commentaires. Il en résulte en contrepartie des programmes volumineux. Pour des raisons de lisibilité, nous avons utilisé des variables en tableaux portant des noms mnémoniques. Cette façon de procéder est peu rationnelle quant à la bonne utilisation de l'espace mémoire de l'ordinateur : un problème de structure dépend de plusieurs paramètres (nombre de nœuds, nombre de liaisons, nombre de chargements différents, etc.), et on réalisera un gain appréciable de mémoire en rangeant toutes ces variables dans un seul tableau géré à l'aide d'une table d'adresses. C'est l'allocation dynamique de mémoire, systématiquement employée dans tous les grands programmes de calcul disponibles sur le marché.

Il existe de bonnes raisons de penser que le coût de la mémoire disponible ira en diminuant et la vitesse d'exécution, en augmentant. Aussi n'est-il pas rentable de se livrer à des astuces de programmation si, pour une poignée d'octets supplémentaires et quelques secondes de plus, on obtient un programme plus lisible et plus facilement modifiable ou adaptable, ce qui se traduira par une économie finale.

La convivialité d'un programme, en particulier la facilité d'introduction des données et la présentation des résultats, conduit à doubler ou à tripler le volume des instructions strictement nécessaires à la solution du problème technique. Il n'est pratiquement pas possible de décrire une structure autrement qu'à l'aide d'un fichier facilement accessible et modifiable. Cet aspect n'a pas été abordé dans l'ouvrage, et nous nous sommes contenté d'une introduction des données toute théorique.

Nous avons évité l'usage des mémoires auxiliaires (disques ou bandes) de façon à ne pas particulariser les instructions utilisées. Celles-ci ont été réduites au strict nécessaire, et les correspondances avec les autres langages de programmation sont évidentes.

L'emploi de variables mnémoniques nous a parfois conduit à donner deux noms différents à une variable suivant la destination du programme : il est naturel de parler du 'nombre de barres' pour une ossature et d'introduire la variable 'Nbarres', alors que la même variable employée dans le programme d'élasticité plane est désignée par 'Nelem' (nombre d'éléments).

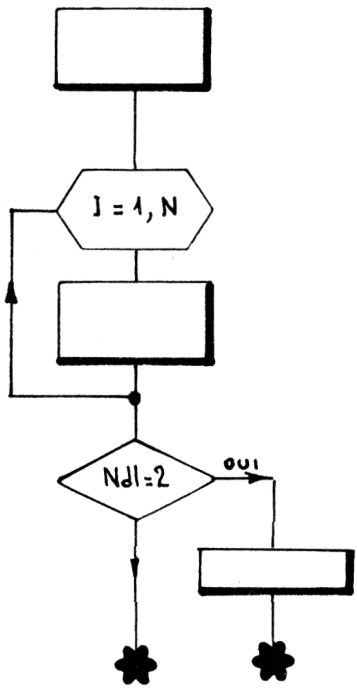
Suite à une habitude héritée du FORTRAN, les variables relatives à des nombres entiers commencent par I, J, K, L, M, N.

Les numéros des lignes des sous-programmes dont les listings sont reproduits dans le reste n'ont qu'une signification locale et évitent l'emploi des étiquettes.

4. ORGANIGRAMMES

Les organigrammes présentés reflètent l'enchaînement des instructions et permettent de mieux appréhender l'organisation logique des sous-programmes.

Nous avons utilisés les symboles suivants :



– Bloc d'instructions arithmétiques ou d'affectation

– Appel à un sous-programme.

– Boucle. La variable I prend successivement les valeurs 1 à N.

I = N, 1, – 1 signifie que I prend successivement les valeurs N, N – 1, ... 1

– Test

– Sortie d'un sous-programme.

Nous avons également utilisé des instructions relatives à des matrices. Celles-ci sont précédées de l'abréviation MAT.

1 PRÉSENTATION

1.1 - RAPPEL SOMMAIRE DE LA MÉTHODE DES DÉPLACEMENTS

Toute structure peut être considérée comme formée des sous-structures élémentaires. Pour les ossatures, les portiques, la sous-structure élémentaire est un élément linéaire dont la définition s'impose à partir de la géométrie. Pour les structures de type plaque ou coque, les sous-structures sont des petits éléments découpés presque arbitrairement dans le milieu continu. Nous utiliserons des éléments de forme triangulaire. Dans tous les cas, on établit une relation entre les forces appliquées en certains points (nœuds) de la sous-structure élémentaire et les développements qui en résultent.

Ces déplacements vont constituer les inconnues du problème. En exprimant que chaque nœud est en équilibre sous l'action des efforts induits par la déformation des éléments incidents et la charge directement appliquée, on constitue un système d'équations linéaires dont la solution fournit les déplacements des nœuds. On utilise alors ces déplacements pour calculer les efforts dans les sous-structures élémentaires et ensuite les réactions d'appui.

1.2 - DEGRÉS DE LIBERTÉ

C'est le nombre de paramètres nécessaires pour définir le déplacement d'un nœud. Ce nombre dépend du type de la structure étudiée. Il sera désigné par 'Ndl'. Donnons quelques exemples :

1. Ossature plane

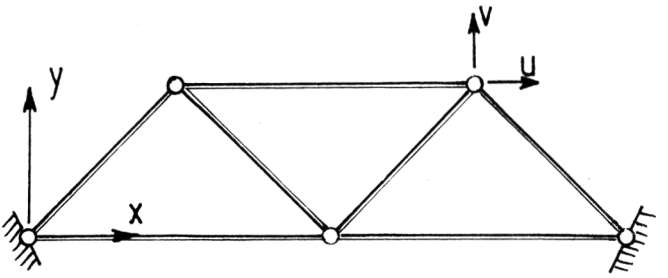


Fig. 1. - 2 degrés de liberté par nœuds :
déplacement horizontal *u*
déplacement vertical *v*.

2. Ossature spatiale

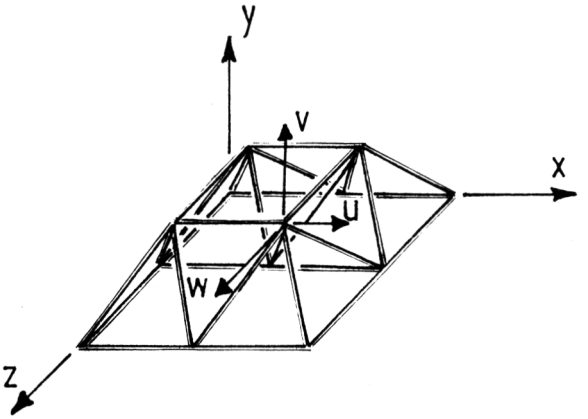


Fig. 2. - 3 degrés de liberté par nœuds :
déplacement horizontal *u*
déplacement vertical *v*
déplacement horizontal *w*.

3. Poutre continue (charges perpendiculaires à la fibre moyenne)

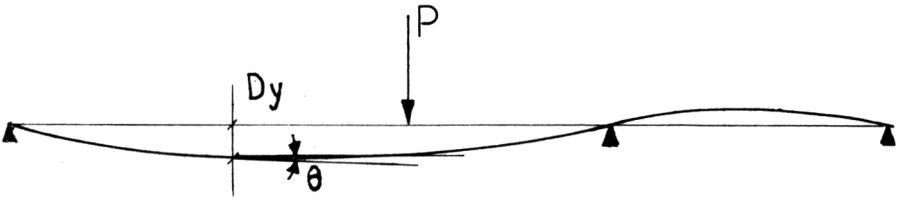


Fig. 3. - 2 degrés de liberté par nœud : déplacement vertical Dy, rotation θ.

4. Elasticité plane

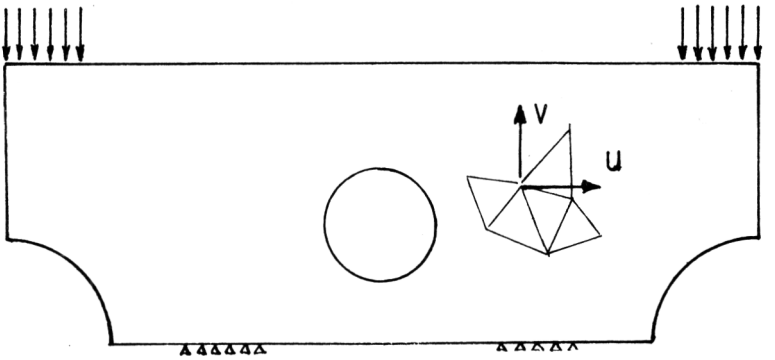


Fig. 4. - 2 degrés de liberté par nœud : déplacement u, déplacement v.

5. Analogie de membrane (problème de torsion)

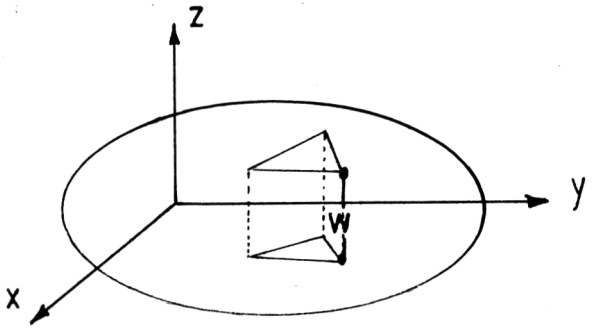


Fig. 5. - 1 degré de liberté par nœud : déplacement vertical w de la membrane.

1.3 - DÉFINITIONS RELATIVES AUX NOEUDS

1. Nombre de nœuds par élément : c'est le nombre de points de connexion de l'élément avec les éléments voisins ou avec le milieu extérieur. Ce paramètre est désigné par 'Nnelem' dans les programmes. Pour les éléments de type linéaires utilisés dans cet ouvrage (ossatures, poutres), Nnelem=2. Pour les éléments triangulaires (élasticité plane, torsion), Nnelem=3.

Le produit (Nnelem × Ndl) donne la dimension de la matrice de rigidité de l'élément.

2. Nombre de nœuds de la structure : c'est le nombre total de points de la structure pour lesquels on va déterminer les déplacements. Il est désigné par 'Nnœuds' dans les programmes.

Le produit (Nœuds × Ndl) donne la dimension du système linéaire à résoudre.

3. Définition des appuis : ce sont les liaisons de la structure avec le milieu extérieur, constituées par des nœuds dont on connaît certains déplacements qui peuvent être nuls ou non (déplacements imposés). Les degrés de liberté de chaque nœud sont spécifiés par un code : 'Isup'.

Nous avons choisi le code suivant :

1 si le déplacement est bloqué

0 si le déplacement est libre.

Pour un seul degré de liberté, on a Isup=0 ou Isup=1

Pour deux degrés de liberté par nœud, par exemple u et v, on peut avoir les combinaisons suivantes :

	u	v	Isup
Libre	0	0	0
Bloqué suivant Y	0	1	1
Bloqué suivant X	1	0	10
Bloqué suivant X et Y	1	1	11

Pour trois degrés de liberté par nœud, par exemple u, v et w :

	u	v	w	Isup
Libre	0	0	0	0
Bloqué suivant Z	0	0	1	1
Bloqué suivant Y	0	1	0	10
Bloqué suivant X	1	0	0	100
Bloqué suivant Y et Z	0	1	1	11
Bloqué suivant X et Z	1	0	1	101
Bloqué suivant X et Y	1	1	0	110
Bloqué suivant X Y Z	1	1	1	111

Les appuis doivent obligatoirement assurer la stabilité de la structure vis-à-vis de tout chargement compatible avec la définition de celle-ci. Dans le cas contraire, la résolution du système linéaire ne pourra être menée à bien.

1.4 - DÉFINITIONS RELATIVES AUX ÉLÉMENTS

1. **Nombre d'éléments** : c'est le nombre total de sous-structures élémentaires constituant la structure globale. Nous supposerons dans chaque programme un seul type d'élément, mais il est évidemment possible d'en avoir plusieurs. On pourra par exemple créer des éléments linéaires dans le programme d'élasticité.

Les grands programmes généraux possèdent une bibliothèque d'éléments permettant de modéliser un grand nombre de structures différentes. Le nombre total d'éléments est désigné dans les programmes par 'Nbarres' pour les ossatures et les poutres continues, et par 'Nelem' pour l'élasticité plane et la torsion.

2. **Définition des éléments** : les éléments sont définis par les numéros des nœuds placés dans le tableau 'Liais'. Pour les éléments triangulaires, il est particulièrement important de définir les nœuds sommets dans le sens trigonométrique positif (sens contraire des aiguilles d'une montre). Dans le cas contraire, la surface du triangle est négative, et le pire est à craindre !

Le tableau 'Liais' contient également les références de certains attributs de l'élément tels que la section et le module E pour les ossatures.

1.5 - LE SYSTÈME LINÉAIRE GLOBAL

Chaque ligne du système linéaire exprime l'équilibre d'un nœud pour un degré de liberté donné. Plutôt que générer le système linéaire ligne par ligne (très peu logique, car il faudrait rechercher l'occurrence d'un nœud parmi tous les éléments), on le forme globalement en cumulant les coefficients de chaque matrice élémentaire à la bonne place. On sait que la matrice du système linéaire est symétrique. Afin d'économiser la place en mémoire, on ne conserve que les coefficients situés au-dessus de la diagonale. De plus, nous verrons, lors de la description de l'algorithme de résolution, qu'il n'est pas utile de conserver les coefficients nuls situés avant le premier terme non nul de chaque colonne. Le gain de place (et de temps de calcul) ainsi réalisé permet d'accroître les possibilités du programme, mais implique une organisation des calculs plus sophistiquée.

1.6 - MÉMOIRE AUXILIAIRE

Nous avons choisi de conserver en mémoire un certain nombre de valeurs caractéristiques des éléments afin de ne pas avoir à les recalculer. Le rôle de cette mémoire de masse est tenu par le tableau 'R'. Les micro-ordinateurs disposant d'une large mémoire disque pourront sauvegarder tous les coefficients des matrices de rigidité des éléments. Notons que ces matrices sont utilisées deux fois : pour former le système linéaire et pour calculer les efforts à partir des déplacements.

1.7 - CHARGES EXTÉRIEURES

Nous avons envisagés plusieurs types de chargement en fonction de la destination des programmes.

1. Ossatures planes et spatiales :
   - charges appliquées aux nœuds
   - poids propre
   - température
   - déplacements d'appuis.
2. Poutres continues :
   - charges appliquées aux nœuds
   - charges concentrées sur les barres
   - charges réparties sur les barres
   - déplacements d'appuis.
3 - Elasticité plane :
   - charges appliquées aux nœuds
   - poids propre
   - température
   - déplacements d'appuis
4. Torsion (analogie de membrane) :
   - pression uniforme, générée automatiquement.

Les données relatives aux charges ne seront pas conservées en mémoire : elles sont reproduites immédiatement après introduction, les effets correspondants sont calculés et cumulés dans les seconds membres du système linéaire.

Cinq cas de chargement distincts ont été prévus : ils peuvent être constitués d'une combinaison quelconque de types de charges (charges aux nœuds, poids propre, température ou déplacement d'appui).

2 LES SOUS-PROGRAMMES GÉNÉRAUX

2.1 - LE PROGRAMME PRINCIPAL

A des modifications mineures près, les quatres programmes présentés sont construits de manière semblable.

Le programme principal comporte :

– Des instructions de déclaration telles que

OPTION BASE 1 signifiant que 1 sera le premier indice d'un tableau.

PRINTER IS 7,1 spécifiant l'unité d'impression.

– La description des variables principales et des variables auxiliaires, ainsi que la déclaration de ces variables en 'commun', afin d'êtres accessibles par différents sous-programmes. Les tableaux recevant des nombres entiers sont déclarés de type INTEGER afin de gagner de la place en mémoire.

– L'initialisation des tableaux en 'commun' au cas où l'on enchaîne un autre problème.

– Les sous-programmes, qui sont de deux types :

• les sous-programmes généraux (indépendants du type de structure étudiée), dont les arguments sont transmis en paramètres,

• les sous-programmes spécifiques au type de structure étudiée, dont les principaux arguments sont dans les zones en 'commun'.

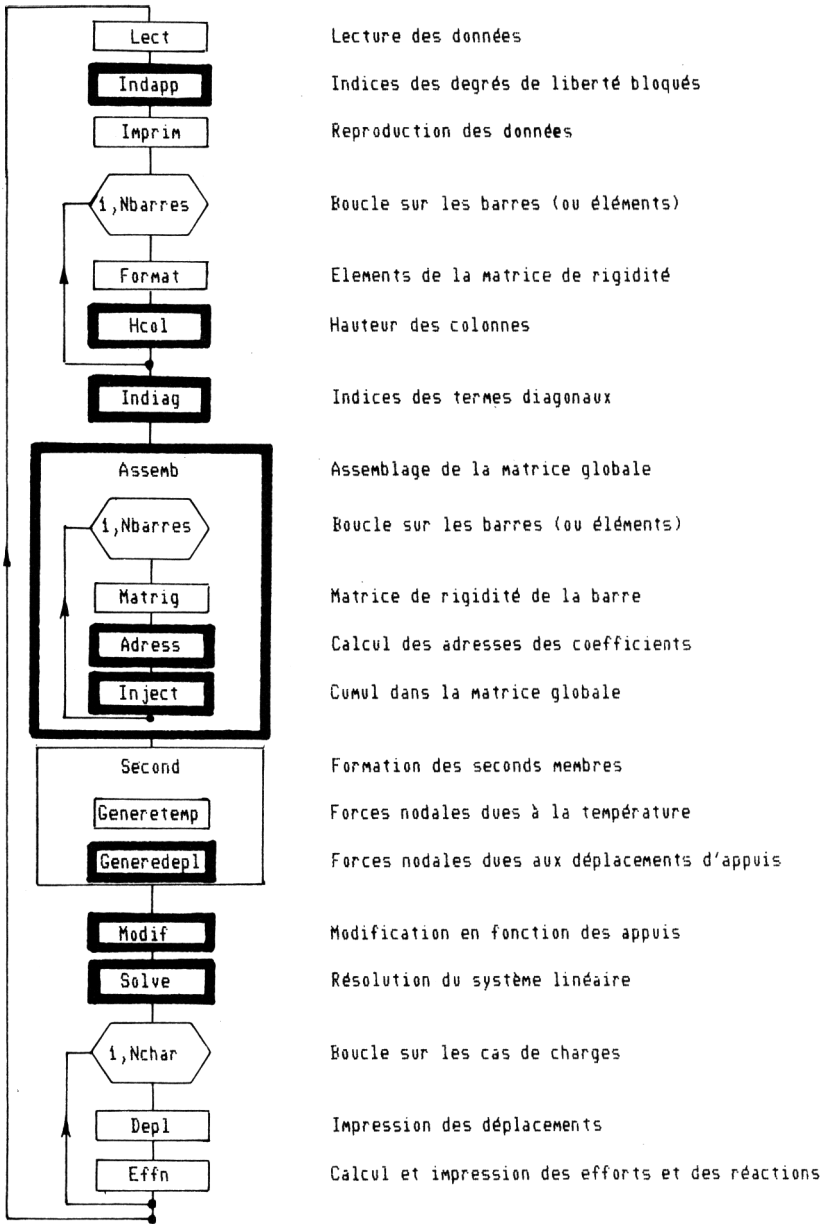


Fig. 6. - Organigramme général

L'organigramme du programme principal est donné figure 6, Les sous-programmes généraux décrits dans le présent chapitre sont encadrés d'un trait fort. Le listing du programme général, particularisé pour chaque problème traité, sera reproduit dans les chapitres correspondants.

2.2 - RANGEMENT DE LA MATRICE PAR LIGNE-DE-CIEL (SKY-LINE)

Avant de poursuivre la description des programmes généraux, il convient de préciser la manière dont sont rangés les coefficients de la matrice du système linéaire. La méthode utilisée est appelée 'ligne-de-ciel' et consiste à ranger dans un tableau à un seul indice les coefficients situés au-dessus de la diagonale, en ne tenant pas compte des termes nuls situés au-dessus du premier terme non nul d'une colonne (ce qui définit une 'ligne-de-ciel'). Cela est illustré figure 7.

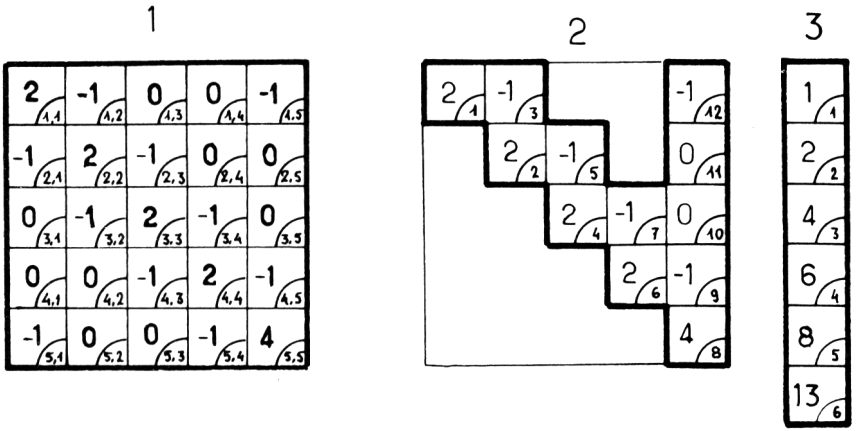


Fig. 7. - Rangement d'une matrice symétrique par ligne-de-ciel.
1 - Tableau complet à deux indices
2 - Tableau à un indice.
3 - Table des adresses des termes diagonaux.

Les coefficients seront rangés dans le tableau 'A' et les adresses des termes diagonaux dans le tableau 'Maxa'. Pour définir ce tableau

d'adresses, on effectue un premier balayage des éléments au cours duquel on détermine les hauteurs de colonnes (ainsi que les caractéristiques des éléments qui serviront à former sa matrice de rigidité). Par cumul des hauteurs de colonnes, on obtient les adresses des termes diagonaux.

2.3 - CALCUL DES INDICES DES DEGRÉS DE LIBERTÉ BLOQUÉS

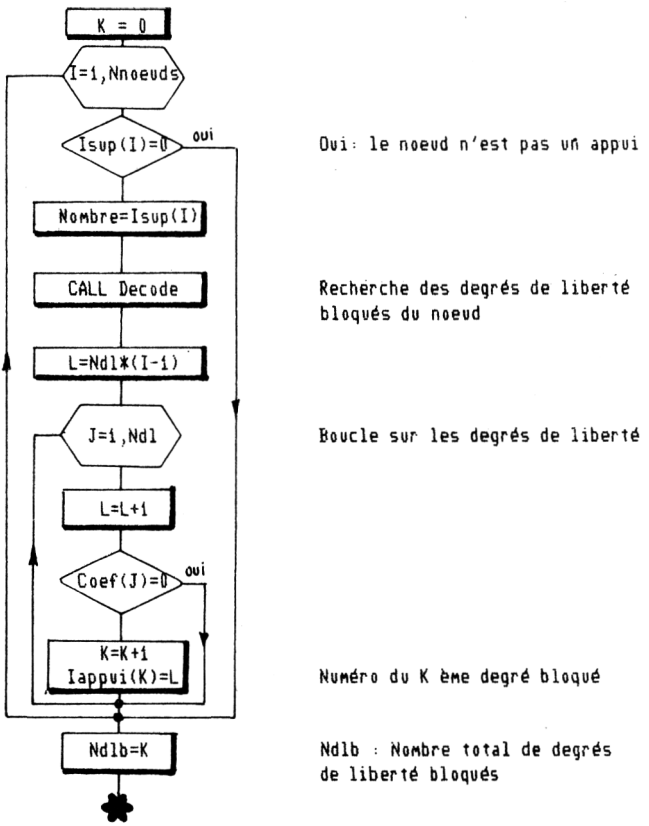


Fig. 8. - Organigramme 'Indapp'

Il est pratique, pour la suite des calculs, de savoir si un degré de liberté est libre ou bloqué. Cela est effectué par le sous-programme 'Indapp', qui génère à partir du tableau des codes appuis 'Isup' le tableau auxiliaire 'Iappui'. Ce travail peut être également exécuté au moment de la lecture des données concernant les nœuds. Rappelons à ce sujet que, dans le programme bien connu 'STRESS', on spécifie le nombre de supports en données générales, on désigne les supports par la lettre 'S', et on précise ensuite si il y a des possibilités de déplacement dans certaines directions. En informatique, le même résultat peut être obtenu par bien des moyens différents. L'organigramme du sous-programme 'Indapp' est donné figure 8.

Listing des sous-programmes 'Indapp' et 'Decode' :

```
2290  ! ****************************************************************
2300  SUB Indapp(Nnoeuds,Ndl,Ndlb,INTEGER Isup(*),Iappui(*))
2310  ! ****************************************************************
2320  !
2330  ! Appelé par Prog. Princ.
2340  ! Appelle : Decode
2350  !
2360  OPTION BASE 1
2370  !
2380  ! Sous-programme créant le vecteur Iappui des degrés de liberté connus
2390  !
2400  DIM Coef(3)
2410  K=0
2420  FOR I=1 TO Nnoeuds
2430      IF Isup(I)=0 THEN 2530
2440      Nombre=Isup(I)
2450      CALL Decode(Nombre,Ndl,Coef(*))
2460      L=Ndl*(I-1)
2470      FOR J=1 TO Ndl
2480          L=L+1
2490          IF Coef(J)=0 THEN 2520
2500          K=K+1
2510          Iappui(K)=L
2520      NEXT J
2530  NEXT I
2540  Ndlb=K
2550  SUBEXIT
2560  SUBEND
```

```
2570  ! ****************************************************************
2580  SUB Decode(Nombre,Nchifr,Coef(*))
2590  ! ****************************************************************
2600  !
2610  ! Appelé par Indapp
2620  !
2630  OPTION BASE 1
2640  !
2650  ! Ex : Nchifr=3; Nombre=110 -----> Coef(1)=1, Coef(2)=1, Coef(3)=0
2660  !
2670  FOR I=1 TO Nchifr
2680      N=INT(Nombre/10)
2690      Coef(Nchifr+1-I)=Nombre-10*N
2700      Nombre=N
2710  NEXT I
2720  SUBEXIT
2730  SUBEND
```

2.4 - CALCUL DES HAUTEURS DE COLONNES

On détermine les hauteurs de colonnes à partir de la définition des éléments. L'algorithme peut être résumé de la manière suivante :

Pour chaque élément :

– Déterminer le plus petit parmi les nœuds définissant l'élément.

– Pour chaque nœud de l'élément :

  – Déterminer la hauteur de la colonne du premier degré de liberté.

  • Si cette hauteur est inférieure à la hauteur déjà déterminée pour ce degré de liberté, passer au nœud suivant.

  • Sinon, pour chaque degré de liberté du nœud, réactualiser les hauteurs de colonne correspondantes.

– Passer au nœud suivant.

L'organigramme correspondant est représenté figure 9.

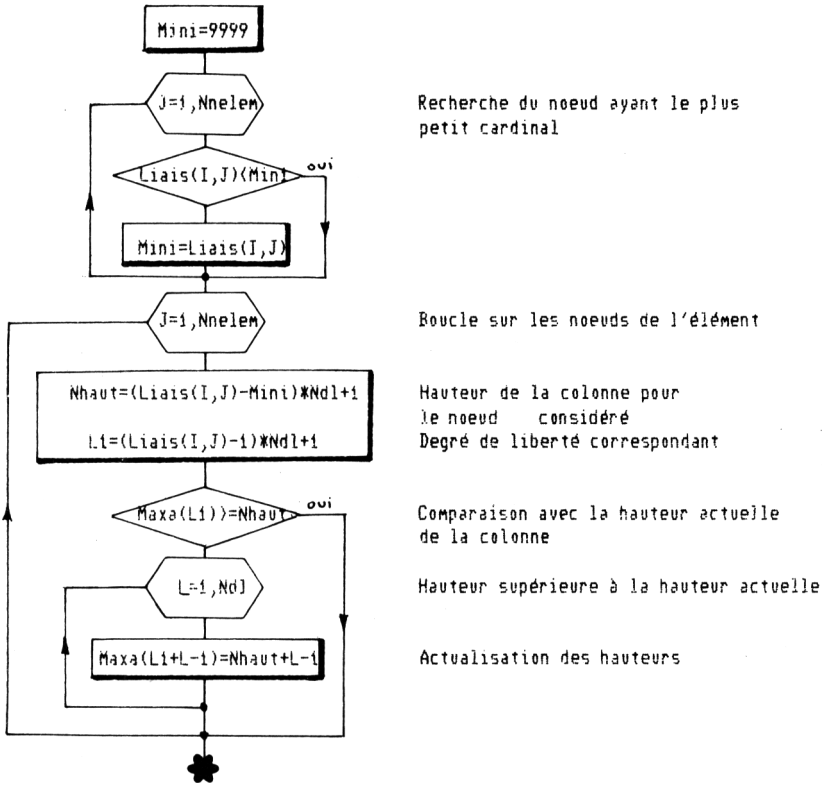


Fig. 9. - Organigramme 'Hcol'

Listing du sous-programme 'Hcol'.

```
3890  ! ******************************************************
3900  SUB Hcol(I,Ndl,Nnelem,INTEGER Liais(*),Maxa(*))
3910  ! ******************************************************
3920  !
3930  ! Appelé par Prog. Princ.
3940  !
3950  OPTION BASE 1
3960  !
3970  ! Calcule les hauteurs des colonnes
3980  ! de la matrice A.
3990  !
```

```
4000  Mini=9997
4010  !
4020  FOR J=1 TO Nnelem
4030      IF Liais(I,J)<Mini THEN Mini=Liais(I,J)
4040  NEXT J
4050  !
4060  FOR J=1 TO Nnelem
4070      Nhaut=(Liais(I,J)-Mini)*Ndl+1
4080      Li=(Liais(I,J)-1)*Ndl+1
4090      IF Maxa(Li)>=Nhaut THEN 4130
4100      FOR L=1 TO Ndl
4110          Maxa(Li+L-1)=Nhaut+L-1
4120      NEXT L
4130  NEXT J
4140  SUBEXIT
4150  SUBEND
```

2.5 - CALCUL DES INDICES DES TERMES DIAGONAUX

Une fois toutes les hauteurs de colonne déterminées, le sous-programme 'Indiag' calcule les adresses des termes de la matrice 'A' situés sur la diagonale. Il suffit d'effectuer le cumul des hauteurs de colonnes.

On détermine ainsi le nombre total de coefficients utiles de la matrice du système linéaire 'Ntot'. Comme on connaît le nombre de cas de charges, on peut vérifier si la taille du tableau 'A' est suffisante pour traiter le problème. On doit avoir :

Dimension de 'A' $\geq$ Maxa(Nn+ 1)—1 + Nchar $\times$ Nn

Si cette condition ne se trouve pas vérifiée, deux essais peuvent être effectués :

– Essayer de renuméroter les nœuds de la structure, afin de diminuer les hauteurs de colonnes.

– Redimensionner le tableau 'A' au détriment des cas de charges, ou du tableau 'R'. Sinon, la structure est trop importante.

L'organigramme du sous-programme 'Indiag' est donné figure 10.

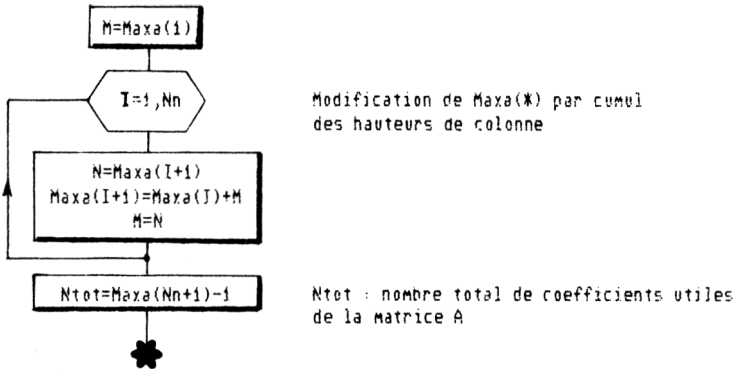


Fig. 10. - Organigramme 'Indiag'

Listing de 'Indiag' :

```
4160  ! ******************************************************
4170  SUB Indiag(Nn,Ntot,INTEGER Maxa(*))
4180  ! ******************************************************
4190  !
4200  ! Appelé par Prog. Princ.
4210  !
4220  OPTION BASE 1
4230  !
4240  ! Calcul des adresses des termes diagonaux de la matrice A
4250  !
4260  M=Maxa(1)
4270  FOR I=1 TO Nn
4280      N=Maxa(I+1)
4290      Maxa(I+1)=Maxa(I)+M
4300      M=N
4310  NEXT I
4320  !
4330  ! Ntot=Nombre de coefficients de la demi matrice du système
4340  !
4350  Ntot=Maxa(Nn+1)-1
4360  !
4370  SUBEXIT
4380  SUBEND
```

2.6 - ASSEMBLAGE DE LA MATRICE DU SYSTÈME LINÉAIRE

Un deuxième parcours des éléments permet d'effectuer les opérations suivantes :

– Former (ou lire sur mémoire auxiliaire) la matrice de rigidité de l'élément.

– Calculer les adresses des coefficients de cette matrice dans le tableau 'A'.

– Cumuler ces coefficients dans le tableau 'A'.

Deux tableaux auxiliaires sont dimensionnés dans 'Assemb' :

– Lm(*), tableau des adresses des degrés de liberté de l'élément dont la dimension est : Ndl × Nnelem

– Rig(*), qui contient les coefficients de la demi-matrice de rigidité de l'élément et dont la dimension doit être :

$$(\text{Ndl} \times \text{Nnelem}) \times (\text{Ndl} \times \text{Nnelem} + 1)/2$$

Listing du sous-programme 'Assemb' :

```
4390  ! ***********************************************************
4400  SUB Assemb
4410  ! ***********************************************************
4420  !
4430  ! Appelé par Prog. Princ.
4440  ! Appelle : Matrig, Adress, Inject
4450  !
4460  OPTION BASE 1
4470  !
4480  ! Assemblage de la matrice globale
4490  !
4500  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
4510  COM Titre$[80],Charge$(5)[80]
4520  COM X(200),Y(200),Z(200),E(10),Sect(30)
4530  COM INTEGER Liais(400,4),Isup(200)
4540  !
4550  COM Ndlb,Nn,Ntot
4560  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(601)
4570  COM A(6000),R(400,15)
4580  !
4590  DIM Lm(6),Rig(21)
4600  !
4610  FOR I=1 TO Nbarres
4620      !
```

```
4630        CALL Matrig(R(*),Rig(*),Ndl,I)
4640        !
4650        CALL Adress(Nnelem,Ndl,I,Lm(*),Liais(*))
4660        !
4670        CALL Inject(I,Lm(*),Rig(*),Nnelem,Ndl,A(*),Maxa(*))
4680        !
4690    NEXT I
4700    SUBEXIT
4710    SUBEND
```

2.7 - CALCUL DES ADRESSES ET INJECTION DANS LA MATRICE GLOBALE

L'emplacement des coefficients de la matrice de rigidité de la barre dans le tableau 'A' est défini à l'aide d'une table d'adresses Lm. Cela est illustré par l'exemple ci-dessous (fig. 11), relatif à une ossature plane. Comme une barre (ou un élément) n'est pas forcément décrite par des nœuds numérotés suivant un ordre croissant, et que

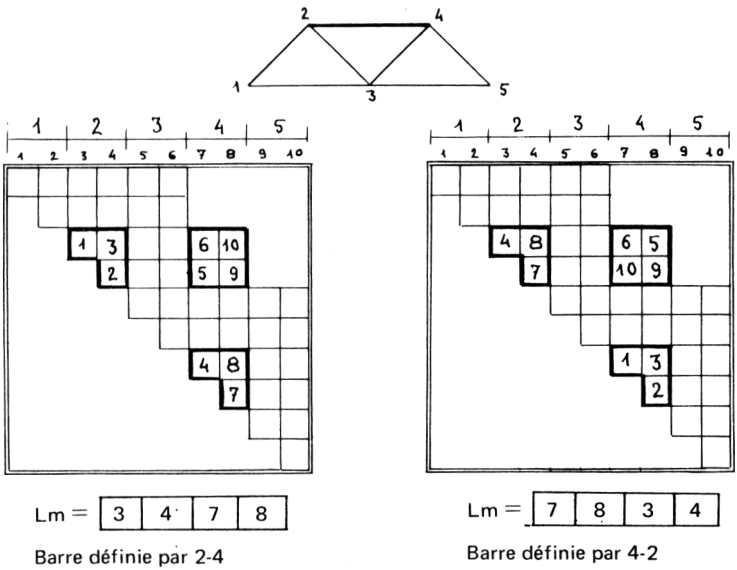


Fig. 11. - Emplacement des coefficients de la barre 2-4.

l'on ne considère que la demi-matrice supérieure, il convient d'en tenir compte en effectuant une éventuelle transposition. Dans l'exemple (fig. 11), on remarque qu'il faut distinguer deux cas, suivant que le numéro du nœud origine est plus grand ou plus petit que le numéro du nœud extrémité.

Il est à noter que, dans le cas particulier des ossatures, cette distinction est inutile, compte tenu des symétries de la matrice de rigidité (une simplification pour un programme spécifique aux ossatures!). Il n'en serait pas de même dans le cas de la matrice de rigidité d'un élément de poutre travaillant en flexion.

Les organigrammes des sous-programmes 'Inject' et 'Adress' sont donnés figure 12.

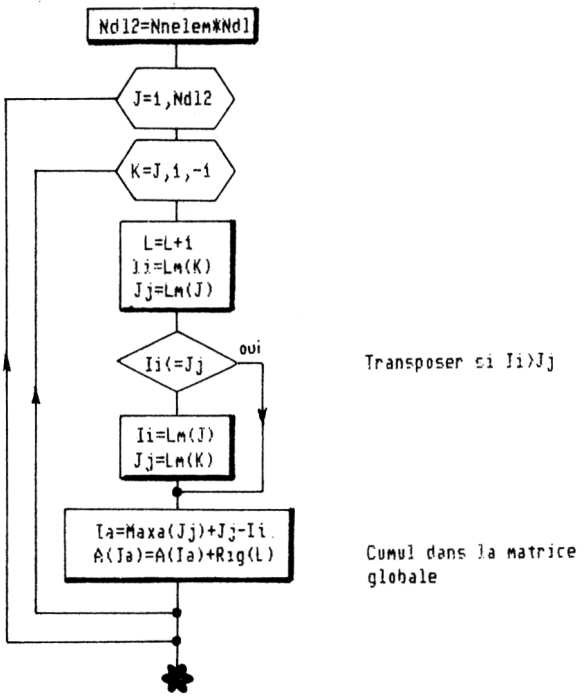
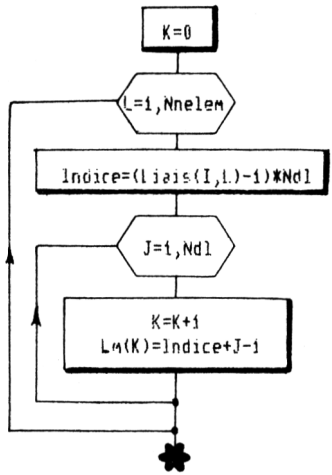


Fig. 12. - Organigramme 'Inject'



Lm(*) contient les numéros des degrés de liberté de l'élément

Fig. 12(bis). - Programme 'Adress'

Listing des sous-programmes 'Adress' et 'Inject' :

```
5310  ! ****************************************************************
5320  SUB Adress(Nnelem,Ndl,I,Lm(*),INTEGER Liais(*))
5330  ! ****************************************************************
5340  !
5350  ! Appelé par Assemb
5360  !
5370  OPTION BASE 1
5380  !
5390  ! Calcule les correspondance des indices entre Rig et A
5400  !
5410  K=0
5420  FOR L=1 TO Nnelem
5430      Indice=(Liais(I,L)-1)*Ndl
5440      FOR J=1 TO Ndl
5450          K=K+1
5460          Lm(K)=Indice+J
5470      NEXT J
5480  NEXT L
5490  SUBEXIT
5500  SUBEND
```

```
5510  ! ****************************************************************
5520  SUB Inject(I,Lm(*),Rig(*),Nnelem,Ndl,A(*),INTEGER Maxa(*))
5530  ! ****************************************************************
5540  !
5550  ! Appelé par Assemb
5560  !
5570  OPTION BASE 1
5580  !
5590  ! Injection de Rig dans A
5600  !
5610  Ndl2=Nnelem*Ndl
5620  L=0
5630  FOR J=1 TO Ndl2
5640      FOR K=J TO 1 STEP -1
5650          L=L+1
5660          Ii=Lm(K)
5670          Jj=Lm(J)
5680          IF Ii<=Jj THEN 5750
5690          !
5700          ! Si Ii > Jj
5710          ! Transposer
5720          !
5730          Ii=Lm(J)
5740          Jj=Lm(K)
5750          Ia=Maxa(Jj)+Jj-Ii
5760          A(Ia)=A(Ia)+Rig(L)
5770      NEXT K
5780  NEXT J
5790  SUBEXIT
5800  SUBEND
```

2.8 - CHARGES NODALES DUES AUX DÉPLACEMENTS D'APPUIS

Si le déplacement d'un des nœuds est connu, il en résulte des efforts dans la structure que nous nous proposons de déterminer.

Considérons d'abord à titre d'exemple un système linéaire 3×3 :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -0.5 \\ -1 & 2 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

et supposons Y = 0.1 connu.

On voit facilement que le système peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-(-1.0)\times 0.1 \\ 0.1 \\ 0-(-0.5)\times 0.1 \end{vmatrix}$$

Pour arriver à ce résultat, il a fallu effectuer les opérations suivantes :

1. multiplier la deuxième colonne par 0.1 et soustraire du second membre,

2. placer la valeur connue 0.1 de Y dans le second membre,

3. annuler la deuxième ligne et la deuxième colonne de la matrice,

4. donner la valeur 1 au terme diagonal de la deuxième ligne.

Le sous-programme 'Genererdepl' effectue les opérations 1 et 2, pour chaque cas de charge. Les coefficients des seconds membres sont placés également dans le tableau 'A', à la suite des coefficients de la matrice.

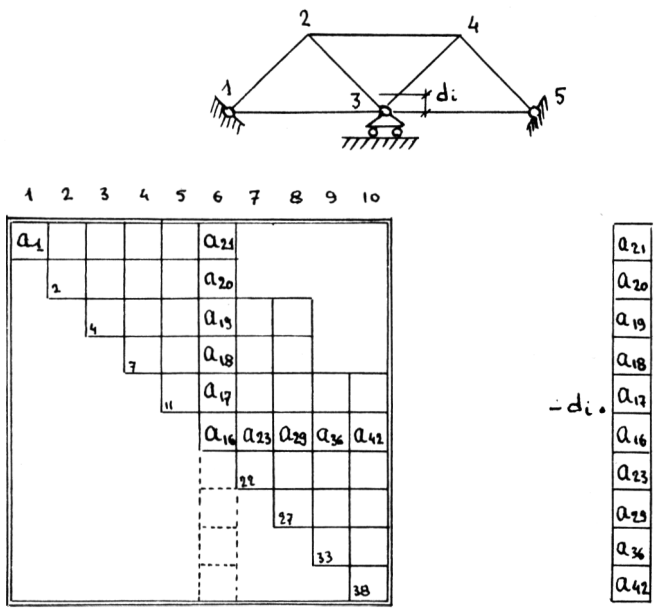


Fig. 13. - Charges nodales provenant d'un déplacement vertical de l'appui 3.

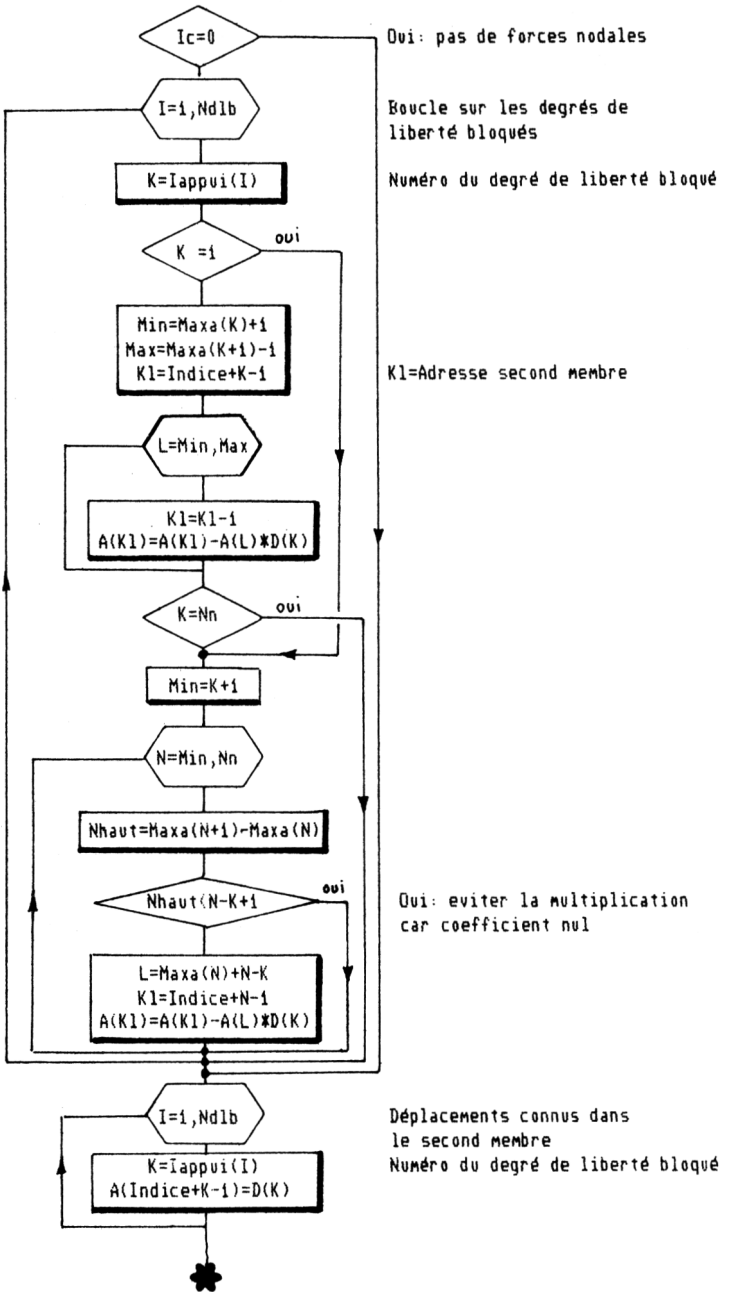


Fig. 14. - Organigramme 'Genererdepl'

Les déplacements des appuis sont rangés dans un tableau auxiliaire 'D', initialisé à 0 au début de la description d'un nouveau cas de chargement. Un indicateur 'Ic' permet d'éviter le produit des colonnes correspondant à un degré de liberté bloqué si le chargement ne prévoit pas de déplacement d'appuis. Il est à noter que cette opération nécessite la recherche des coefficients de la matrice 'A' sous la diagonale, donc à droite de celle-ci (fig. 13).

L'organigramme de 'Genererdepl' est donné figure 14.

Listing du sous-programme 'Genererdepl' :

```
7510  ! ****************************************************************
7520  SUB Genererdepl(Indice,Ic,Nn,Ndlb,D(*),A(*),INTEGER Iappui(*),Maxa(*))
7530  ! ****************************************************************
7540  !
7550  ! Appelé par Second
7560  !
7570  OPTION BASE 1
7580  !
7590  ! Inscrit les  déplacements  d'appuis  connus  (ou nuls) dans
7600  ! le second membre. Genère les forces nodales dues aux dépla
7610  ! cements d'appuis.
7620  !
7630  IF Ic=0 THEN Second
7640  FOR I=1 TO Ndlb
7650      K=Iappui(I)
7660      IF K=1 THEN 7810
7670      Min=Maxa(K)+1
7680      Max=Maxa(K+1)-1
7690      K1=Indice+K-1
7700      !
7710      ! Colonne
7720      !
7730      FOR L=Min TO Max
7740          K1=K1-1
7750          A(K1)=A(K1)-A(L)*D(K)
7760      NEXT L
7770      IF K=Nn THEN 7890
7780      !
7790      ! Ligne
7800      !
7810      Min=K+1
7820      FOR N=Min TO Nn
7830          Nhaut=Maxa(N+1)-Maxa(N)
7840          IF Nhaut(N-K+1 THEN 7880
```

```
7850            L=Maxa(N)+N-K
7860            K1=Indice+N-1
7870            A(K1)=A(K1)-A(L)*D(K)
7880        NEXT N
7890    NEXT I
7900 Second: !
7910    FOR I=1 TO Ndlb
7920        K=Iappui(I)
7930        A(Indice+K-1)=D(K)
7940    NEXT I
7950    SUBEXIT
7960    SUBEND
```

2.9 - PRISE EN COMPTE DES APPUIS DE LA STRUCTURE

Ce sont les opérations 3 et 4 décrites dans le paragraphe précédent et réalisées par le sous-programme 'Modif', appelé une seule fois après que tous les cas de charge ont été décrits et tous les seconds membres générés.

L'exemple (fig. 15) montre l'état du tableau 'A' après cette phase dans le cas d'une petite ossature plane soumise à deux cas de charge.

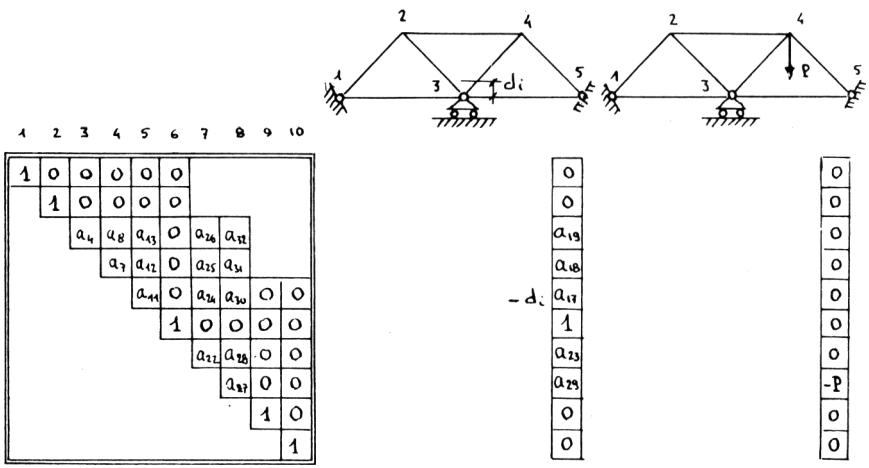


Fig. 15. - Second membre pour déplacement d'appui et charge nodale.

L'organigramme du sous-programme 'Modif' est donné figure 16.

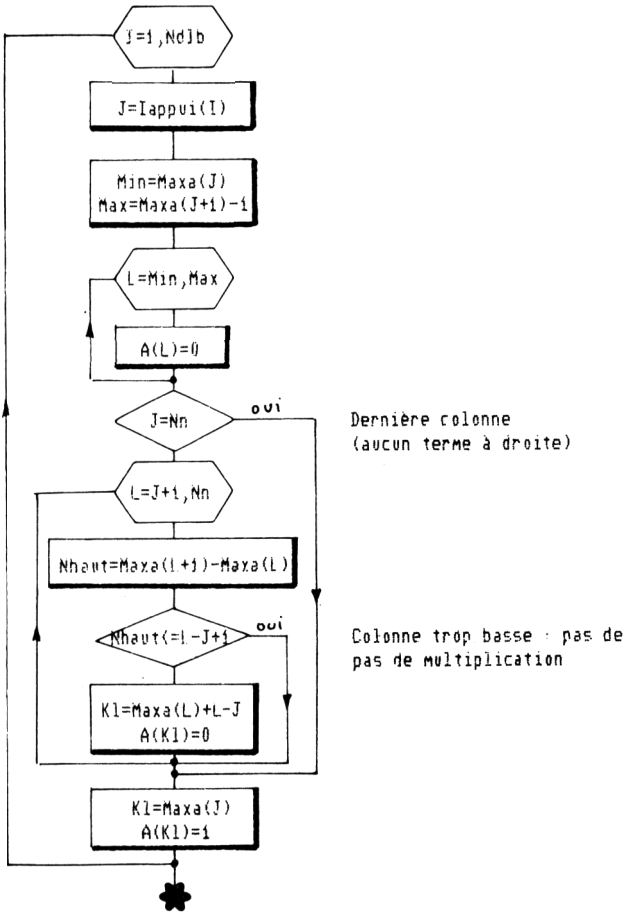


Fig. 16. - Organigramme 'Modif'

Listing du sous-programme 'Modif' :

```
8250  ! ****************************************************************
8260  SUB Modif(Nn,Ndlb,A(*),INTEGER Maxa(*),Iappui(*))
8270  ! ****************************************************************
8280  !
8290  ! Appelé par Prog. Princ.
8300  !
```

```
8310  OPTION BASE 1
8320  !
8330  ! Annuler les coefficients de la ligne et de la  colonne  pour  le
8340  ! degré de liberté bloqué et donner la valeur 1 au terme diagonal.
8350  !
8360  FOR I=1 TO Ndlb
8370      J=Iappui(I)
8380      !
8390      ! Colonne
8400      !
8410      Min=Maxa(J)
8420      Max=Maxa(J+1)-1
8430      FOR L=Min TO Max
8440          A(L)=0
8450      NEXT L
8460      IF J=Nn THEN 8560
8470      !
8480      ! Ligne
8490      !
8500      FOR L=J+1 TO Nn
8510          Nhaut=Maxa(L+1)-Maxa(L)
8520          IF Nhaut<L-J+1 THEN 8550
8530          K1=Maxa(L)+L-J
8540          A(K1)=0
8550      NEXT L
8560      K1=Maxa(J)
8570      A(K1)=1
8580  NEXT I
8590  SUBEXIT
8600  SUBEND
```

2.10 - RÉSOLUTION DU SYSTÈME LINÉAIRE

Nous utiliserons la méthode de factorisation de GAUSS, modifiée en vue de son utilisation en calcul automatique. Nous supposerons que la matrice du système linéaire est définie positive : s'il n'en est pas ainsi, soit la structure est instable, soit elle ne correspond pas à une structure réelle, ce qui provient généralement d'une erreur de données. Rappelons que cette méthode comporte deux phases :

– La première phase transforme la matrice du système linéaire de façon à obtenir une matrice triangulaire supérieure. C'est la 'factorisation' ou 'triangularisation', ou encore 'élimination'.

– La seconde phase est la phase de substitution, permettant de calculer les inconnues les unes après les autres.

Illustrons la phase triangularisation de l'algorithme de GAUSS sous sa forme habituelle dans le cas d'un système 5 X 5 où les coefficients non écrits sont nuls.

2	-1			-1		1
-1	2	-1				
	-1	2	-1			
		-1	2	-1		
-1			-1	4		

Fig. 17. - Système initial.

On divise la première ligne (et le premier coefficient du second membre) par le premier coefficient de la première ligne que l'on appelle 'pivot'. Ce pivot ne peut être nul pour des raisons physiques. On multiplie par les coefficients non nuls de la première colonne et on soustrait des lignes suivantes, sans oublier d'effectuer cette opération sur le (ou les) second membre. Le système est devenu :

1	-1/2			-1/2		1/2
	3/2	-1		-1/2		1/2
	-1	2	-1			
		-1	2	-1		
	-1/2			7/2		1/2

Fig. 18. - Après élimination de la première inconnue.

On repète ces opérations sur la sous-matrice entourée d'un trait pointillé, et ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Les étapes successives sont :

1	-1/2			-1/2		1/2	1	-1/2			-1/2		1/2
	1	-2/3		-1/3		1/3		1	-2/3		-1/3		1/3
		4/3	-1	-1/3		1/3			1	-3/4	-1/4		1/4
		-1	2	-1						5/4	-5/4		1/4
		-1/3	-1	10/3		2/3				-5/4	13/4		3/4

Fig. 19.

1	-1/2			-1/2	1/2
	1	-2/3		-1/3	1/3
		1	-3/4	-1/4	1/4
			1	-1	1/5
				2	1

1	-1/2			-1/2	1/2
	1	-2/3		-1/3	1/3
		1	-3/4	-1/4	1/4
			1	-1	1/5
				1	1/2

Fig. 19. - Étapes de la triangularisation.

Le calcul des inconnues se fait alors par substitution.

Nous constatons que, lors du processus de triangularisation, la sous-matrice entourée reste toujours symétrique : les coefficients situés sur une colonne sous la diagonale se retrouvent sur la ligne de même indice à droite de la diagonale. On peut donc effectuer toutes les opérations sur la demi-matrice supérieure. De plus, on remarque que les zéros situés sur une colonne au-dessus du dernier terme non nul n'interviennent pas dans le processus d'élimination et par conséquent il n'est pas utile de les considérer. Cela justifie la méthode de rangement adoptée pour la matrice du système linéaire.

Malgré le fait que le processus de triangularisation est effectué ligne par ligne, il est préférable de mener les calculs colonne par colonne. On utilise pleinement les avantages du rangement par ligne-de-ciel décrit au paragraphe 2.2. En outre, cette méthode présente l'avantage de pouvoir être facilement adaptable à la résolution de grands systèmes dont la matrice 'A' ne peut tenir en mémoire centrale. On effectue alors une segmentation sur disque.

Exposons d'abord l'algorithme employé dans le cas d'une matrice rangée sous forme habituelle, c'est-à-dire où les coefficients sont repérés par un indice ligne et un indice colonne (fig. 20).

I est l'indice de la ligne du premier terme non nul de la colonne J,

M est l'indice de la ligne du premier terme non nul de la colonne K.

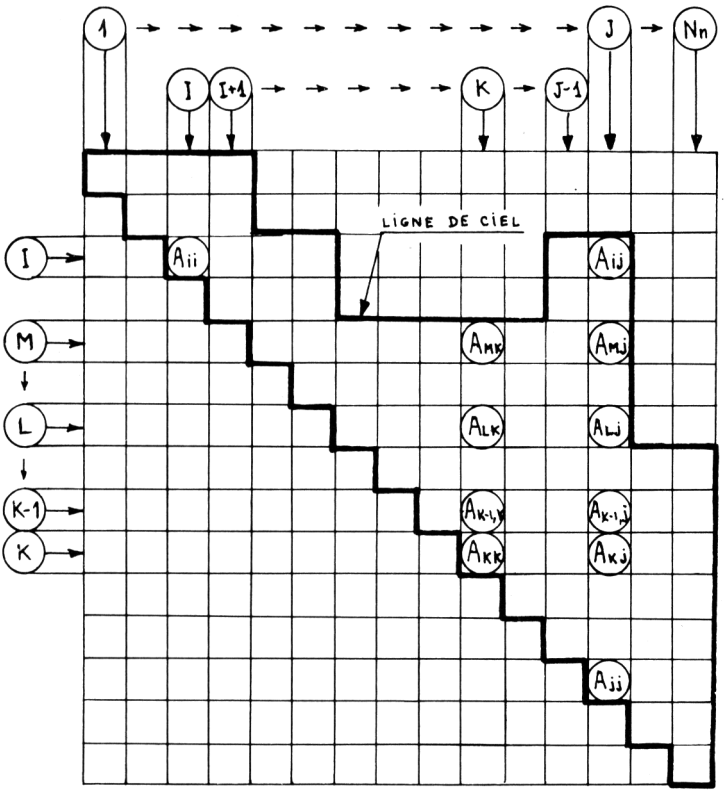


Fig. 20. - Indices utilisés lors de la factorisation.

Schématiquement, l'algorithme peut se résumer de la manière suivante :

```
J = 1 .... Nn
  K = I+1 .... J-1
    L = MAX(I,M) .... K-1
      A(K,J)=A(K,J)-A(L,J)*A(L,K)
  L = I .... J-1
    A(J,J)=A(J,J)-A(L,J)*A(L,J)/A(L,L)
    A(L,J)=A(L,J)/A(L,L)
```

La seule différence concerne la diagonale où l'on conserve les pivots, toujours nécessaires pour effectuer une nouvelle élimination. Cette phase est réalisée indépendamment du second membre et ne dépend donc pas a priori des charges. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce point.

La figure 21 illustre cet algorithme appliqué au système linéaire (fig. 17).

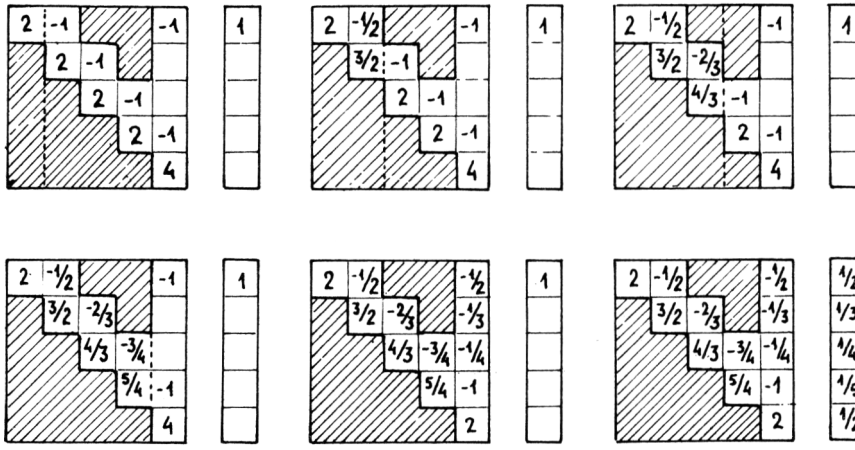


Fig. 21. - Élimination colonne par colonne.

L'organigramme détaillé de cette phase est donné figure 22.

La seconde phase commence par la factorisation du second membre, qui est traité comme une colonne de la matrice 'A', et se poursuit par le processus de sustitution. A la différence de la méthode de calcul traditionnelle, cette substitution n'est pas réalisée dans l'ordre décroissant, mais en parcourant les colonnes. En fait, on effectue les mêmes opérations que dans la méthode classique, mais dans un ordre différent, moins 'évident'.

L'algorithme de la phase substitution est donné figure 23.

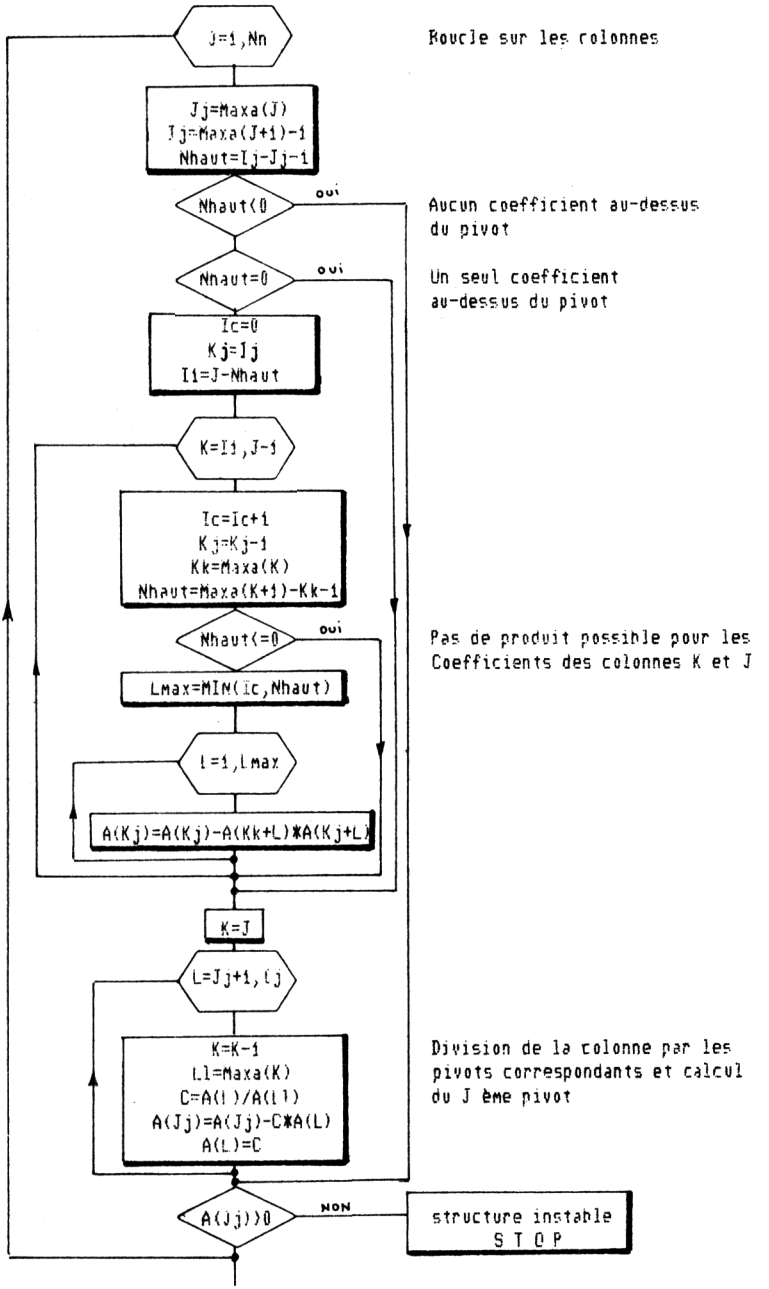


Fig. 22. - Organigramme 'Solve' (Factorisation).

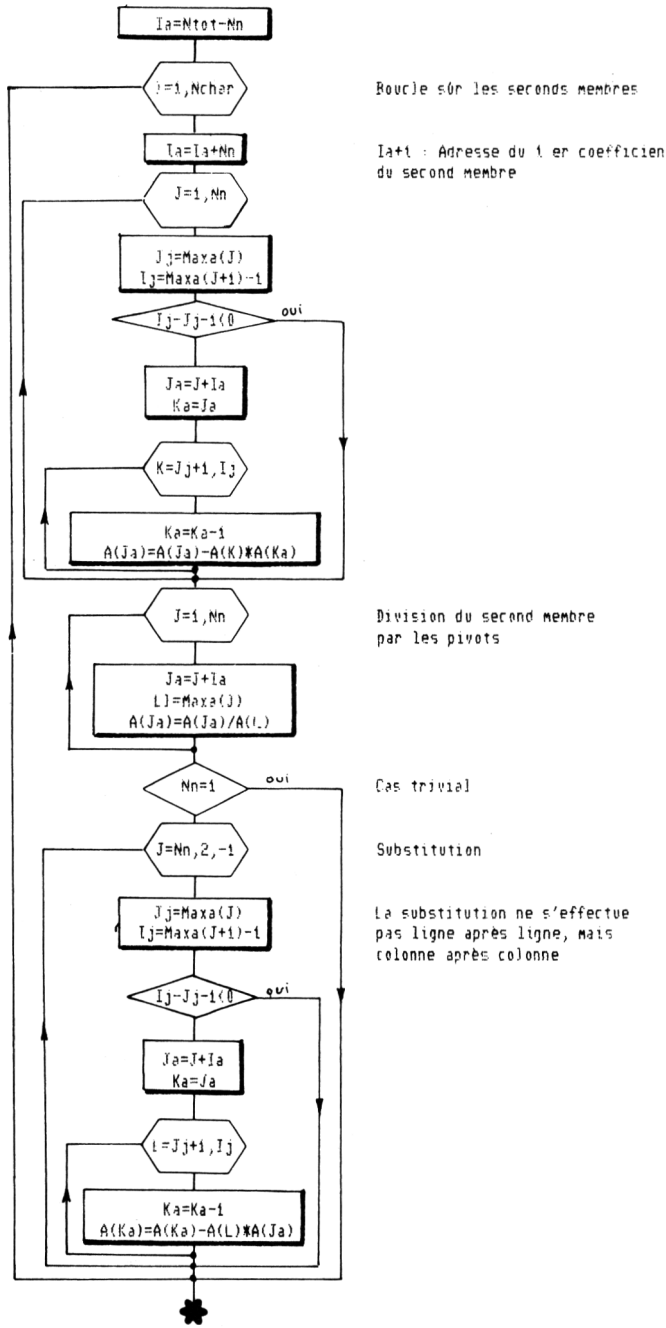


Fig. 23. - Organigramme 'Solve' (Substitution).

Listing du sous-programme 'Solve' :

```
8610  ! ****************************************************************
8620  SUB Solve(Nn,Ntot,Nchar,A(*),INTEGER Maxa(*))
8630  ! ****************************************************************
8640  !
8650  ! Appelé par Prog. Princ.
8660  !
8670  OPTION BASE 1
8680  !
8690  ! Résolution d'un système linéaire à matrice définie positive
8700  ! rangée par ligne de ciel, avec  plusieurs  seconds  membres.
8710  ! Méthode de G A U S S adaptée au calcul automatique.
8720  !
8730  !  Nn = Dimension du système
8740  !  Not = Nombre de coefficients de la matrice dans A
8750  !  Nchar = Nombre de vecteurs seconds membres
8760  !
8770  !  Exemple : Nn = 5    Ntot = 11    Nchar = 2
8780  !
8790  !         Matrice                  Seconds membres
8800  !         -------                  ---------- ----
8810  !
8820  !   A(1)  A(3)  A(6)                A(12)   A(17)
8830  !         A(2)  A(5)  A(9)          A(13)   A(18)
8840  !               A(4)  A(8)          A(14)   A(19)
8850  !                     A(7)  A(11)   A(15)   A(20)
8860  !                           A(10)   A(16)   A(21)
8870  !
8880  !   Maxa = [1, 2, 4, 7, 10, 12]
8890  !
8900  ! Factorisation de la matrice du système linéaire
8910  !
8920  FOR J=1 TO Nn
8930      Jj=Maxa(J)
8940      Ij=Maxa(J+1)-1
8950      Nhaut=Ij-Jj-1
8960      IF Nhaut<0 THEN 9250
8970      IF Nhaut=0 THEN 9170
8980      Ic=0
8990      Kj=Ij
9000      I1=J-Nhaut
9010      FOR K=I1 TO J-1
9020          Ic=Ic+1
9030          Kj=Kj-1
9040          Kk=Maxa(K)
9050          Nhaut=Maxa(K+1)-Kk-1
9060          IF Nhaut<=0 THEN 9110
```

```
9070          Lmax=MIN(Ic,Nhaut)
9080          FOR L=1 TO Lmax
9090              A(Kj)=A(Kj)-A(Kk+L)*A(Kj+L)
9100          NEXT L
9110      NEXT K
9120      !
9130      ! Division de la colonne par les
9140      ! pivots correspondants et calcul
9150      ! du J ème pivot
9160      !
9170      K=J
9180      FOR L=Jj+1 TO Ij
9190          K=K-1
9200          L1=Maxa(K)
9210          C=A(L)/A(L1)
9220          A(Jj)=A(Jj)-C*A(L)
9230          A(L)=C
9240      NEXT L
9250      IF A(Jj)>0 THEN 9290
9260      PRINT " STRUCURE INSTABLE :"
9270      PRINT " ERREUR DE DONNEES."
9280      PAUSE
9290  NEXT J
9300  !
9310  ! Boucle sur les seconds membres
9320  !
9330  Ia=Ntot-Nn
9340  FOR I=1 TO Nchar
9350      Ia=Ia+Nn
9360      !
9370      ! Factorisation du second membre
9380      !
9390      FOR J=1 TO Nn
9400          Jj=Maxa(J)
9410          Ij=Maxa(J+1)-1
9420          IF Ij-Jj-1<0 THEN 9490
9430          Ja=J+Ia
9440          Ka=Ja
9450          FOR K=Jj+1 TO Ij
9460              Ka=Ka-1
9470              A(Ja)=A(Ja)-A(K)*A(Ka)
9480          NEXT K
9490      NEXT J
9500      !
9510      ! Division du second membre
9520      ! par les pivots.
9530      !
9540      FOR J=1 TO Nn
9550          Ja=J+Ia
9560          L1=Maxa(J)
9570          A(Ja)=A(Ja)/A(L1)
9580      NEXT J
```

```
9590      IF Nn=1 THEN 9740
9600      !
9610      ! Substitution
9620      !
9630      FOR J=Nn TO 2 STEP -1
9640          Jj=Maxa(J)
9650          Ij=Maxa(J+1)-1
9660          IF Ij-Jj-1<0 THEN 9730
9670          Ja=J+Ia
9680          Ka=Ja
9690          FOR L=Jj+1 TO Ij
9700              Ka=Ka-1
9710              A(Ka)=A(Ka)-A(L)*A(Ja)
9720          NEXT L
9730      NEXT J
9740  NEXT I
9750  SUBEXIT
9760  SUBEND
```

3 LES OSSATURES PLANES ET SPATIALES

3.1 - GÉNÉRALITÉS SUR LES OSSATURES

Ce sont des structures formées d'éléments linéaires ne travaillant que sous l'effet de l'effort normal : traction ou compression. Ce mode de fonctionnement est souvent justifié si la section de la barre est faible devant sa longueur, ce qui lui confère une grande souplesse vis-à-vis des déformations de flexion. C'est le cas en particulier des charpentes métalliques. Pour une structure plane, chaque nœud (assemblage de plusieurs barres) possède deux degrés de liberté : les deux composantes u et v de son déplacement. Pour une structure spatiale, le nombre de degrés de liberté est de trois : u, v et w. (fig. 1 et 2).

3.2 - LE PROGRAMME PRINCIPAL

Le listing du programme principal, correspondant à l'organigramme donné au paragraphe 2.1, est reproduit ci-dessous. Les tableaux sont dimensionnés pour des ossatures de 200 nœuds et

400 barres avec 50 degrés de liberté bloqués. Le nombre de modules différents est 5, et le nombre de sections différentes, 30. Cinq cas de charges sont possibles.

Listing du programme principal :

```
10    ! ******************************************************
20    ! *                                                    *
30    ! *      CALCUL DES OSSATURES PLANES OU SPATIALES      *
40    ! *                                                    *
50    ! *           PAR LA METHODE DES DEPLACEMENTS          *
60    ! *                                                    *
70    ! *     ***      *****     *****      ***     *******  *
80    ! *    *   *    *     *   *     *    *   *       *     *
90    ! *   *     *   *         *         *     *      *     *
100   ! *   *     *    *****     *****    *******      *     *
110   ! *   *     *         *         *   *     *      *     *
120   ! *    *   *    *     *   *     *   *     *      *     *
130   ! *     ***      *****     *****    *     *      *     *
140   ! *                                                    *
150   ! ******************************************************
160   !
170   ! BLOC COMMUN
180   OPTION BASE 1
190   PRINTER IS 7,1
200   !
210   ! Définition des variables
220   !
230   ! 1°/ VARIABLES DEFINISSANT LE PROBLEME
240   !
250   ! Nnoeuds...........Nombre de noeuds
260   ! Nbarres...........Nombre de liaisons
270   ! Nchar.............Nombre de cas de charges
280   ! Ndl...............Nombre de degrés de liberté par noeud
290   !                   Ndl = 2 Ossature plane
300   !                   Ndl = 3 Ossature spatiale
310   ! Nnelem............Nombre de noeuds d'un élément
320   !                   Nnelem = 2 pour une barre (2 noeuds)
330   ! Nmodul............Nombre de modules d'élasticité
340   ! Nsect.............Nombre de sections différentes
350   ! Titre$............Titre du probleme
360   ! Charges$..........Titres des cas de charge
370   ! X(I), Y(I), Z(I)..Coordonnées du noeud I
380   ! Isup(I) ..........Code appui : Nombre de 2 chiffres = ossature plane
390   !                                Nombre de 3 chiffres ossature spatiale
400   !                   = 000 Noeud libre
410   !                   = 100 Noeud bloqué suivant X
420   !                   =  10 Noeud bloqué suivant Y
430   !                   =   1 Noeud bloqué suivant Z
440   !                   = Autres combinaisons : 111 110 101 11
```

```
450  ! Liais(I,1)........Numéro du noeud origine de la barre
460  ! Liais(I,2)........Numéro du noeud extrémité la barre
470  ! Liais(I,3)........Numéro de la section Sect
480  ! Liais(I,4)........Numéro du module d'élasticité E
490  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
500  COM Titre$[80],Charge$(5)[80]
510  COM X(200),Y(200),Z(200),E(10),Sect(30)
520  COM INTEGER Liais(400,4),Isup(200)
530  !
540  ! 2°/ VARIABLES AUXILIAIRES EN COMMUN
550  !
560  ! Ndlb..............Nombre de degrés de liberté fixés (appuis)
570  ! Nn................Noeuds*Ndl : Dimension du système linéaire
580  ! Ntot..............Nombre de coefficients de la matrice A
590  ! Iappui(I) ........Numéros des degrés de liberté fixés
600  ! Maxa(I)...........Adresses des termes diagonaux de la matrice
610  ! A(I)..............Tableau des coefficients de la matrice et des
620  !                   seconds membres
630  ! R(I,14)...........Mémoire auxillaire concernant les barres
640  !                    1 à  4 : E*S/L ,Cosinus directeurs, Cosx,Cosy,Cosz
650  !                    5 à  9 : Efforts équivalents à la température
660  !                   10 à 14 : Efforts équivalents au poids propre
670  COM Ndlb,Nn,Ntot
680  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(601)
690  COM A(6000),R(400,14)
700  !
710  ! Initialisation
720  !
730  MAT Liais=(0)  !
740  MAT A=(0)      !
750  MAT R=(0)      ! VARIABLES EN COMMUN
760  MAT Maxa=(0)   !
770  MAT Isup=(0)   !
780  Nsect=1
790  Nmodul=1
800  Nnelem=2
810  !
820  ! Lecture des données générales et des coordonnées des noeuds
830  !
840  CALL Lect
850  !
860  ! Calcul des indices des degrés de liberté bloqués
870  !
880  CALL Indapp(Nnoeuds,Ndl,Ndlb,Isup(*),Iappui(*))
890  !
900  ! Reproduction des données relatives à la structure
910  !
920  CALL Imprim
930  !
940  FOR I=1 TO Nbarres
950      !
960      ! Formation de la matrice de rigidite de la liaison I
```

```
970        !
980        CALL Format(I)
990        !
1000       ! Calcul de la hauteur des colonnes correspondantes
1010       !
1020       CALL Hcol(I,Ndl,Nnelem,Liais(*),Maxa(*))
1030       !
1040   NEXT I
1050   !
1060   ! Calcul des indices des termes diagonaux
1070   !
1080   CALL Indiag(Nn,Ntot,Maxa(*))
1090   !
1100   ! Assemblage de la matrice globale
1110   !
1120   CALL Assemb
1130   !
1140   ! Lecture des charges et création du ou des seconds membres
1150   !
1160   CALL Second
1170   !
1180   ! Modification de la matrice en fonction des appuis
1190   !
1200   CALL Modif(Nn,Ndlb,A(*),Maxa(*),Iappui(*))
1210   !
1220   ! Résolution du système linéaire
1230   !
1240   CALL Solve(Nn,Ntot,Nchar,A(*),Maxa(*))
1250   !
1260   ! Pour chaque cas de charge, impression des déplacements des noeuds,
1270   ! calcul et impression des réactions d'appuis, calcul et  impression
1280   ! des efforts dans les barres.
1290   !
1300   Indice=Maxa(Nn+1)-Nn ! permet de récuperer les déplacements de chaque
1310   !                      cas de charge dans le tableau A.
1320   PRINT LIN(2)
1330   PRINT "RESULTATS"
1340   PRINT
1350   FOR I=1 TO Nchar
1360       !
1370       PRINT
1380       PRINT "CAS DE CHARGE N° ";I
1390       PRINT "================="
1400       PRINT Charge$(I)
1410       !
1420       Indice=Indice+Nn
1430       !
1440       ! Impression des déplacements
1450       !
1460       CALL Depl(Indice,Ndl,Nnoeuds,A(*))
1470       !
```

```
1480      ! Calcul et impression des efforts et
1490      ! des réactions d'appuis.
1500      !
1510      CALL Effn(Indice,I)
1520      !
1530      PRINT LIN(2)
1540  NEXT I
1550  !
1560  DISP "FIN PROBLEME"
1570  PAUSE
1580  GOTO 730
1590  END
```

3.3 - LECTURE DES DONNÉES

Ainsi qu'il a été spécifié dans le paragraphe 0.3, la lecture des données est prévue de manière toute formelle, en mode conversationnel et sans aucune possibilité de correction. Il n'est pas concevable de générer ainsi les données de structures importantes, les erreurs étant inévitables. On pourra par exemple créer un programme où les données sont introduites en DATA. Ce préambule est valable pour les autres programmes présentés dans l'ouvrage.

La structure est définie géométriquement par un certain nombre de paramètres généraux. Il faut fournir :

– Le titre du problème,

– Le nombre de dimensions (structure plane ou spatiale), ce qui définit le nombre de degrés de liberté par nœuds 'Ndl',

– Le nombre de nœuds, y compris les appuis, 'Nnœuds',

– Le nombre de barres 'Nbarres',

– Le nombre de cas de charges, 'Nchar',

– Le nombre de sections différentes utilisées dans la structure, 'Nsect',

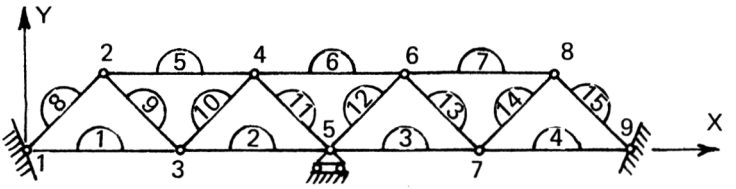
– Le nombre de modules différents, 'Nmodul'.

Ces données générales permettent la lecture des coordonnées des nœuds, X(I), Y(I), (Z(I)), ainsi que les codes appuis, Isup(I).

Les connexions sont définies par la donnée pour chaque barre, du nœud origine, du nœud extrémité, du numéro de la section

utilisée et du numéro du module d'élasticité. Toutes ces données sont regroupées dans le tableau 'Liais'.

Ces définitions sont illustrées sur l'exemple ci-dessous (fig. 24).



Nnœuds = 9 Nbarres = 15 Nsect = 1 Nmodul = 1

I	X(I)	Y(I)	Isup(I)
1	0.	0.	11
2	2.	2.	0
3	4.	0.	0
4	6.	2.	0
5	8.	0.	1
6	10.	2.	0
7	12.	0.	0
8	14.	2.	0
9	16.	0.	11

I	Sect (I)
1	0.002

I	E(I)
1	21000000.

I	Liais(I,1)	Liais(I,2)	Liais(I,3)	Liais(I,4)
1	1	3	1	1
2	3	5	1	1
3	5	7	1	1
4	7	9	1	1
5	2	4	1	1
6	4	6	1	1
7	6	8	1	1
8	1	2	1	1
9	3	2	1	1
10	3	4	1	1
11	5	4	1	1
12	5	6	1	1
13	7	6	1	1
14	7	8	1	1
15	9	8	1	1

Fig. 24. - Exemple de définition d'une ossature plane.

Listing du sous-programme 'Lect'

```
1600  ! ******************************************************************
1610  SUB Lect
1620  ! ******************************************************************
1630  !
1640  ! Appelé par Prog. Princ.
1650  !
1660  OPTION BASE 1
1670  !
1680  ! Lecture des données relatives à l'ossature
1690  !
1700  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
1710  COM Titre$[80],Charge$(5)[80]
1720  COM X(200),Y(200),Z(200),E(10),Sect(30)
1730  COM INTEGER Liais(400,4),Isup(200)
1740  !
1750  COM Ndlb,Nn,Ntot
1760  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(601)
1770  COM A(6000),R(400,14)
1780  !
1790  INPUT "Titre",Titre$
1800  INPUT "Nombre de dimensions (Plan=2, Spatial=3)",Ndl
1810  INPUT "Nombre de Noeuds",Nnoeuds
1820  INPUT "Nombre de barres",Nbarres
1830  INPUT "Nombre de cas de charge",Nchar
1840  INPUT "Nombre de Sections  (1)",Nsect
1850  INPUT "Nombre de Modules E (1)",Nmodul
1860  Nn=Nnoeuds*Ndl
1870  !
1880  ! Lecture des coordonnées des noeuds
1890  !
1900  FOR I=1 TO Nnoeuds
1910      IF Ndl=3 THEN 1940
1920      INPUT "X, Y, ",X(I),Y(I)
1930      GOTO 1950
1940      INPUT "X, Y, Z, ",X(I),Y(I),Z(I)
1950      INPUT "Code Appui ? (0)=Noeud libre",Isup(I)
1960  NEXT I
1970  !
1980  ! Définition des liaisons
1990  !
2000  FOR I=1 TO Nbarres
2010      DISP "Noeud origine, Noeud extrémité"
2020      INPUT Liais(I,1),Liais(I,2)
2030      Liais(I,3)=1
2040      Liais(I,4)=1
2050      DISP "N° Section (1)  N° Module (1) FAIRE CONTINUE Si 1 et 1"
2060      INPUT Liais(I,3),Liais(I,4)
2070  NEXT I
2080  !
```

```
2090  ! Lecture des sections
2100  !
2110  FOR I=1 TO Nsect
2120      DISP "Section N° ";I
2130      INPUT Sect(I)
2140  NEXT I
2150  !
2160  ! Lecture des modules
2170  !
2180  FOR I=1 TO Nmodul
2190      DISP "Module N° ";I
2200      INPUT E(I)
2210  NEXT I
2220  !
2230  SUBEXIT
2240  SUBEND
```

3.4 - REPRODUCTION DES DONNÉES

Quelle que soit la manière dont les données ont été introduites, il est nécessaire de les reproduire afin de bien savoir quelle structure a été calculée. Ces données doivent permettre de reconstituer intégralement le problème. Dans le cas présent des ossatures, la seule instruction 'logique' porte sur la distinction entre structure plane et structure spatiale.

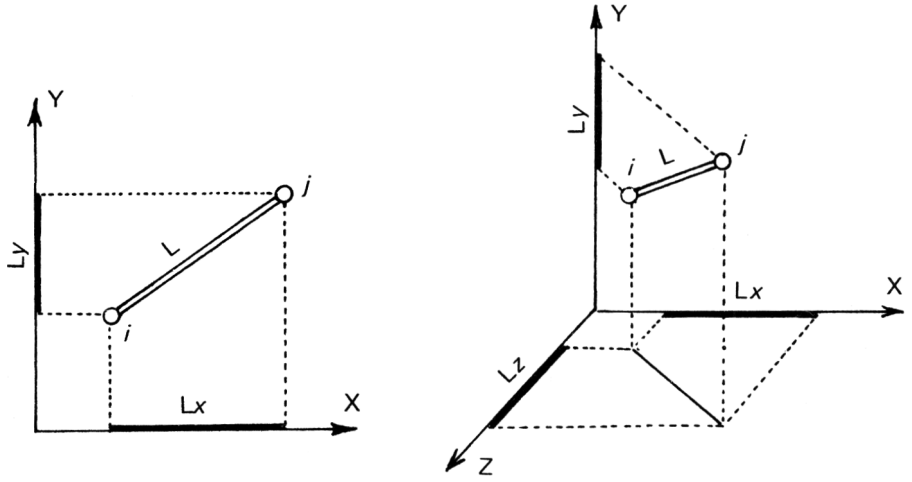
Listing du sous-programme 'Imprim'

```
2700  ! ******************************************************************
2710  SUB Imprim
2720  ! ******************************************************************
2730  !
2740  ! Appelé par Prog. Princ.
2750  !
2760  OPTION BASE 1
2770  !
2780  ! Reproduction des données générales de la structure
2790  !
2800  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
2810  COM Titre$[80],Charge$(5)[80]
2820  COM X(200),Y(200),Z(200),E(10),Sect(30)
2830  COM INTEGER Liais(400,4),Isup(200)
2840  !
```

```
2850  COM Ndlb,Nn,Ntot
2860  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(601)
2870  COM A(6000),R(400,14)
2880  !
2890  PRINT "TITRE : "&Titre$
2900  PRINT
2910  IF Ndl=2 THEN PRINT " Ossature plane axe Y vertical"
2920  IF Ndl=3 THEN PRINT " Ossature spatiale axe Y vertical"
2930  PRINT
2940  PRINT "Nombre de noeuds = ";Nnoeuds
2950  PRINT "Nombre de barres = ",Nbarres
2960  PRINT "Nombre de cas de charges = ";Nchar
2970  PRINT "Nombre de sections différentes = ",Nsect
2980  PRINT "Nombre de modules d'élasticité = ";Nmodul
2990  PRINT
3000  PRINT "COORDONNEES DES NOEUDS"
3010  PRINT
3020  IF Ndl=2 THEN PRINT " N°        X             Y       Code appui"
3030  IF Ndl=3 THEN PRINT " N°        X             Y             Z       Code appui
"
3040  PRINT
3050  FOR I=1 TO Nnoeuds
3060      IF Ndl=2 THEN PRINT USING 3070;I,X(I),Y(I),Isup(I)
3070      IMAGE DDD,3X,MDDD.DDD,5X,MDDD.DDD,11X,DDD
3080      IF Ndl=3 THEN PRINT USING 3090;I,X(I),Y(I),Z(I),Isup(I)
3090      IMAGE DDD,3X,MDDD.DDD,5X,MDDD.DDD,5X,MDDD.DDD,9X,DDD
3100  NEXT I
3110  PRINT
3120  PRINT "DEFINITION DES LIAISONS"
3130  PRINT
3140  PRINT " N°   Origine  Extrémité  N° Sect.  N° Module"
3150  PRINT
3160  FOR I=1 TO Nbarres
3170      PRINT USING 3180;I,Liais(I,1),Liais(I,2),Liais(I,3),Liais(I,4)
3180      IMAGE DDD,5X,DDD,6X,DDD,8X,DD,8X,DD
3190  NEXT I
3200  PRINT
3210  PRINT "SECTIONS DES BARRES"
3220  PRINT
3230  FOR I=1 TO Nsect
3240      PRINT "Section N° ";I," = ";Sect(I)
3250  NEXT I
3260  PRINT
3270  PRINT "MODULES D'ELASTICITE"
3280  PRINT
3290  FOR I=1 TO Nmodul
3300      PRINT "Module N° ";I;" = ";E(I)
3310  NEXT I
3320  SUBEXIT
3330  SUBEND
```

3.5 - CALCUL DES PRINCIPALES CARACTÉRISTIQUES DES BARRES

Dans les grands programmes généraux, c'est souvent au cours de la première boucle sur les éléments que l'on calcule les matrices de rigidité. Afin de ne pas grossir démesurément la mémoire 'R', nous avons choisi de ne calculer que certaines valeurs : la rigidité de la barre ES/L et ses cosinus directeurs. Ces valeurs serviront à constituer sa matrice de rigidité (sous-programme 'Matrig') et à calculer les efforts normaux à partir des déplacements. D'autres choix peuvent être retenus en fonction des priorités accordées par l'utilisateur aux critères temps d'exécution et encombrement mémoire. Nous avons opté pour un compromis entre les deux solutions. La définition des cosinus directeurs est précisée (fig. 25).



$Cx = Lx/L$
$Cy = Ly/L$

$Cx = Lx/L$
$Cy = Ly/L$
$Cz = Lz/L$

Fig. 25. - Définition des cosinus directeurs.

L'organigramme du sous-programme 'Format' est donné figure 26.

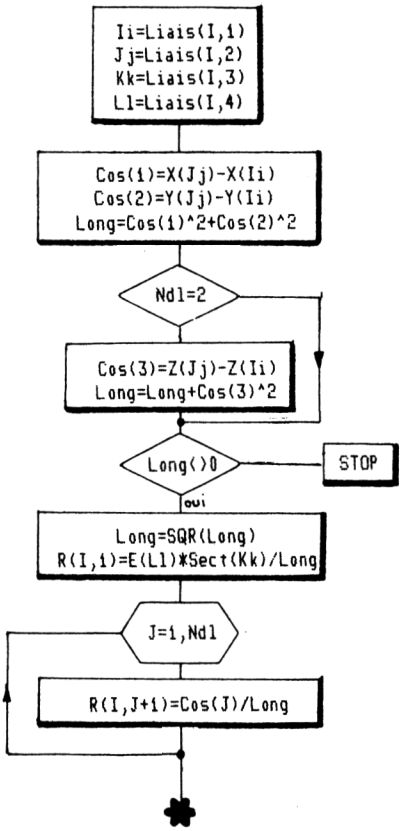


Fig. 26. - Organigramme du sous-programme 'Format'.

Listing du sous-programme 'Format'

```
3340  ! ******************************************************************
3350  SUB Format(I)
3360  ! ******************************************************************
3370  !
3380  ! Appelé par Prog. Princ.
3390  !
3400  OPTION BASE 1
3410  !
3420  ! Calcul de la rigidité et de l'inclinaison de la barre
3430  !
3440  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
3450  COM Titre$[80],Charge$(5)[80]
```

```
3460  COM X(200),Y(200),Z(200),E(10),Sect(30)
3470  COM INTEGER Liais(400,4),Isup(200)
3480  !
3490  COM Ndlb,Nn,Ntot
3500  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(601)
3510  COM A(6000),R(400,14)
3520  !
3530  DIM Cos(3)
3540  !
3550  Ii=Liais(I,1)
3560  Jj=Liais(I,2)
3570  Kk=Liais(I,3)
3580  Ll=Liais(I,4)
3590  !
3600  Cos(1)=X(Jj)-X(Ii)
3610  Cos(2)=Y(Jj)-Y(Ii)
3620  Long=Cos(1)^2+Cos(2)^2
3630  IF Ndl=2 THEN 3660
3640  Cos(3)=Z(Jj)-Z(Ii)
3650  Long=Long+Cos(3)^2
3660  Long=SQR(Long)
3670  IF Long<>0 THEN 3710
3680  PRINT "LONGUEUR NULLE POUR LA BARRE ";I
3690  STOP
3700  !
3710  R(I,1)=E(Ll)*Sect(Kk)/Long
3720  !
3730  FOR J=1 TO Ndl
3740      R(I,J+1)=Cos(J)/Long
3750  NEXT J
3760  SUBEXIT
3770  SUBEND
```

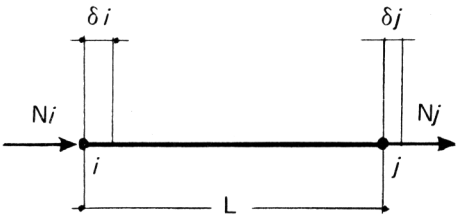
3.6 - MATRICE DE RIGIDITÉ D'UNE BARRE DANS LE PLAN

On distingue la matrice de rigidité dans le système d'axes local, et la matrice de rigidité dans le système d'axes global. Dans le système d'axes local, c'est une relation qui relie les efforts et les déplacements suivant l'axe de la barre, et dont les coefficients ne dépendent que de la section, de la longueur et du module d'élasticité du matériau.

Afin de pouvoir écrire l'équilibre de chaque nœud de la structure, il est nécessaire d'exprimer ces matrices de rigidité dans un

système d'axes unique, le système global. On utilise les relations entre les grandeurs mesurées suivant l'axe de la barre et dans le système global, exprimées figure 28 ci-dessous sous forme matricielle où l'on a posé :

$$Cx = (Xj - Xi)/L \quad ; \quad Cy = (Yj - Yi)/L$$



$$\frac{ES}{L}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N_i \\ N_j \end{vmatrix}$$

Fig. 27. - Matrice de rigidité dans le système local.

Il est important de noter que Cx et Cy sont des grandeurs algébriques qui dépendent de l'orientation de la barre : i est le nœud origine et j, le nœud extrémité.

$$\begin{vmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & & \\ & & C_x & C_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_x & \\ C_y & \\ & C_x \\ & C_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N_i \\ N_j \end{vmatrix}$$

Fig. 28. - Changement de repère pour les structures planes.

On obtient ainsi la matrice de rigidité d'une barre pour une ossature plane.

$$\frac{ES}{L}\begin{bmatrix} C_x^2 & C_xC_y & -C_x^2 & -C_xC_y \\ C_yC_x & C_y^2 & -C_yC_x & -C_y^2 \\ -C_x^2 & -C_xC_y & C_x^2 & C_xC_y \\ -C_yC_x & -C_y^2 & C_yC_x & C_y^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \end{bmatrix}$$

Fig. 29. - Matrice de rigidité d'une barre (ossature plane).

3.7 - MATRICE DE RIGIDITÉ D'UNE BARRE DANS L'ESPACE

Pour une barre dans l'espace, les relations entre les grandeurs mesurées dans le système local et celles mesurées dans le système global s'expriment par les relations (fig. 30).

La matrice de rigidité de la barre dans l'espace est alors (fig. 31) :

Ces matrices sont calculées par le sous-programme 'Matrig', que la structure soit plane ou spatiale, à partir des valeurs déterminées par le sous-programme 'Format' et rangées dans le tableau 'R'. L'organigramme du sous-programme 'Matrig' est donné figure 32.

$$\begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z & & & \\ & & & C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{zj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x & \\ C_y & \\ C_z & \\ & C_x \\ & C_y \\ & C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \end{bmatrix}$$

Fig. 30. - Changement de repère pour une ossature spatiale.

$$\frac{ES}{L} \begin{bmatrix} C_x^2 & C_xC_y & C_xC_z & -C_x^2 & -C_xC_y & -C_xC_z \\ C_yC_x & C_y^2 & C_yC_z & -C_yC_x & -C_y^2 & -C_yC_z \\ C_zC_x & C_zC_y & C_z^2 & -C_zC_x & -C_zC_y & -C_z^2 \\ -C_x^2 & -C_xC_y & -C_xC_z & C_x^2 & C_xC_y & C_xC_z \\ -C_yC_x & -C_y^2 & -C_yC_z & C_yC_x & C_y^2 & C_yC_z \\ -C_zC_x & -C_zC_y & -C_z^2 & C_zC_x & C_zC_y & C_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ F_{xj} \\ F_{yj} \\ F_{zj} \end{bmatrix}$$

Fig. 31. - Matrice de rigidité d'une barre (ossature spatiale)

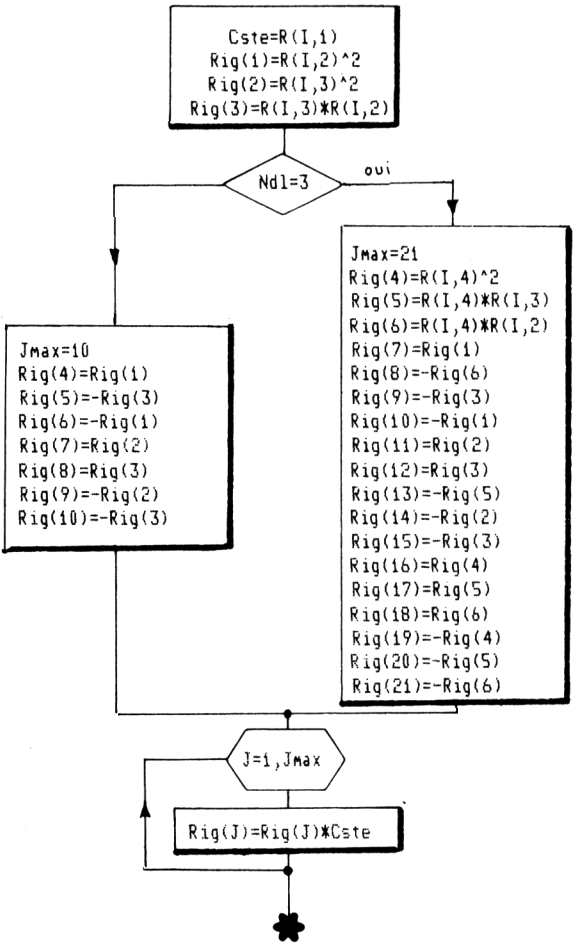


Fig. 32. - Organigramme 'Matrig'

Listing de 'Matrig' :

```
4610  ! ****************************************************************
4620  SUB Matrig(R(*),Rig(*),Ndl,I)
4630  ! ****************************************************************
4640  !
4650  ! Appelé par Assemb
4660  !
4670  OPTION BASE 1
4680  !
4690  ! Calcul de la matrice de rigidité de la barre sous la forme :
4700  !
4710  ! Rig(1)  Rig(3)  Rig(6) ....
4720  !         Rig(2)  Rig(5) ....
4730  !                 Rig(4) ....
4740  !
4750  Cste=R(I,1)
4760  Rig(1)=R(I,2)^2
4770  Rig(2)=R(I,3)^2
4780  Rig(3)=R(I,2)*R(I,3)
4790  IF Ndl=3 THEN 4890
4800  Jmax=10
4810  Rig(4)=Rig(1)
4820  Rig(5)=-Rig(3)
4830  Rig(6)=-Rig(1)
4840  Rig(7)=Rig(2)
4850  Rig(8)=Rig(3)
4860  Rig(9)=-Rig(2)
4870  Rig(10)=-Rig(3)
4880  GOTO 5090
4890  Jmax=21
4900  Rig(4)=R(I,4)^2
4910  Rig(5)=R(I,4)*R(I,3)
4920  Rig(6)=R(I,4)*R(I,2)
4930  Rig(7)=Rig(1)
4940  Rig(8)=-Rig(6)
4950  Rig(9)=-Rig(3)
4960  Rig(10)=-Rig(1)
4970  Rig(11)=Rig(2)
4980  Rig(12)=Rig(3)
4990  Rig(13)=-Rig(5)
5000  Rig(14)=-Rig(2)
5010  Rig(15)=-Rig(3)
5020  Rig(16)=Rig(4)
5030  Rig(17)=Rig(5)
5040  Rig(18)=Rig(6)
5050  Rig(19)=-Rig(4)
5060  Rig(20)=-Rig(5)
5070  Rig(21)=-Rig(6)
5080  !
5090  FOR J=1 TO Jmax
5100      Rig(J)=Rig(J)*Cste
5110  NEXT J
5120  SUBEXIT
5130  SUBEND
```

3.8 - DÉFINITION DES CHARGES

Le second groupe de données, relatives aux chargements de la structure, est défini ici dans le sous-programme 'Second'.

Quatre types de charges sont prévus :

1. Charges arrivant directement sur les nœuds. C'est le plus simple. Il suffit de placer directement les deux (ou trois) composantes au bon endroit dans le second membre du système linéaire. La variable 'Indice' donne l'adresse du premier coefficient du second membre en cours de chargement (les seconds membres sont placés à la suite des coefficients de la matrice dans le même tableau 'A').

2. Charge répartie provenant du poids propre de la barre. L'action de la pesanteur s'exerce suivant l'axe Y pour les structures planes comme pour les structures spatiales. Ce cas de charge est généré automatiquement à partir de la donnée de la densité du matériau. Cette densité est supposée être unique pour toute la structure et les charges nodales sont calculées à partir de la section des barres et des longueurs de celles-ci. On est obligé de conserver le poids de la barre en mémoire pour le calcul des efforts normaux dans les barres, ainsi que l'illustre la décomposition suivante :

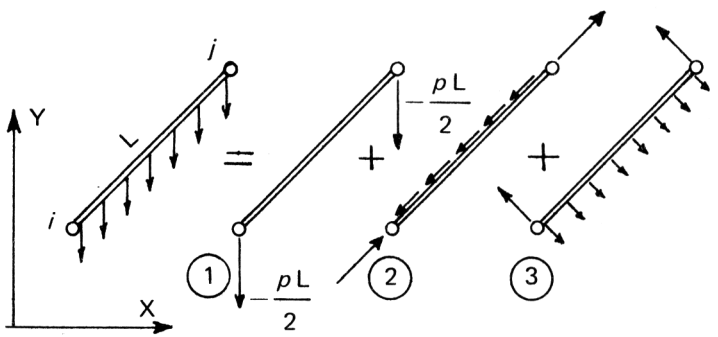


Fig. 33. - Décomposition de la charge provenant du poids propre.

Les chargements 2 et 3 sont auto-équilibrés et, par conséquent, sont sans influence sur les déplacements des nœuds et les réactions d'appuis. Par contre, il faut tenir compte de la variation d'effort normal dans la barre due au chargement 2 lors du calcul des efforts normaux à partir des déplacements des nœuds.

3. Température. L'action de la température est assimilée à un effort axial provoquant le même allongement de la barre (fig. 34).

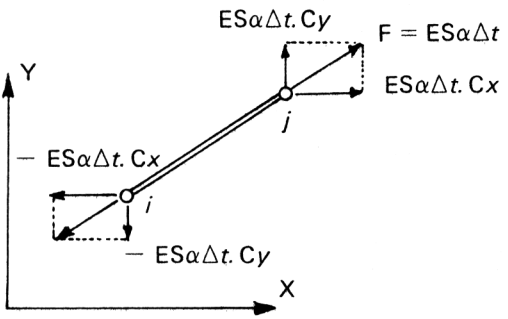


Fig. 34. - Forces nodales provenant de l'effet thermique.

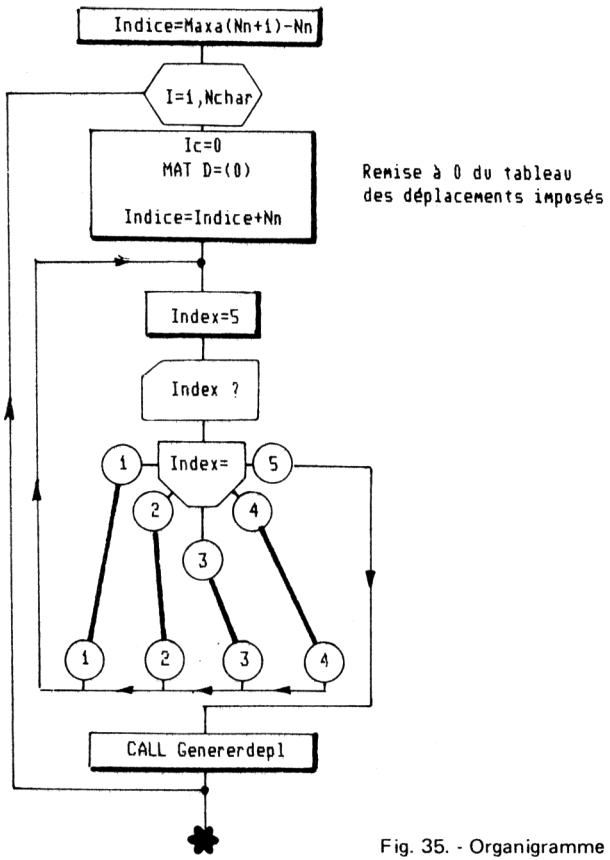
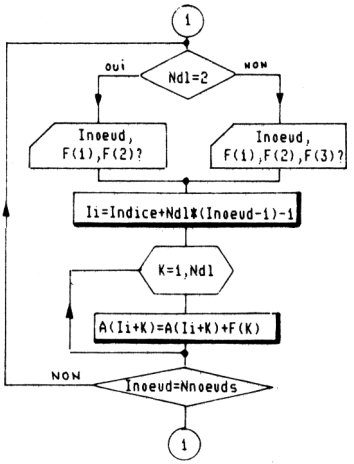
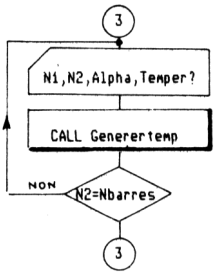


Fig. 35. - Organigramme du sous-programme 'Second'

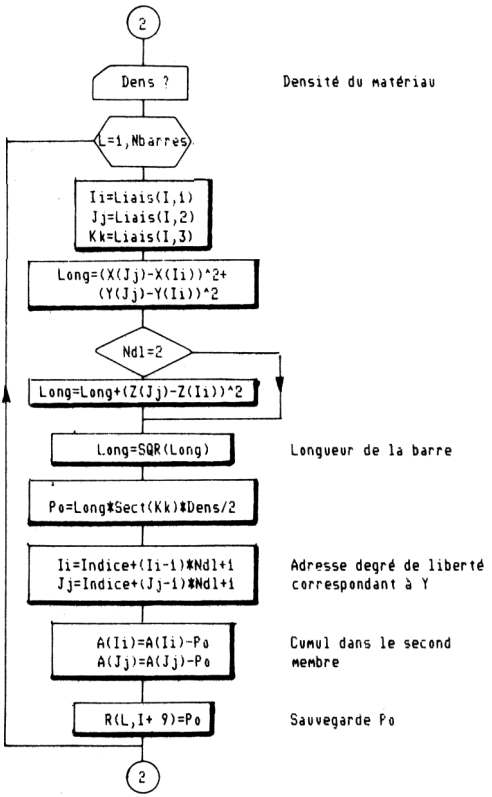
Charges nodales



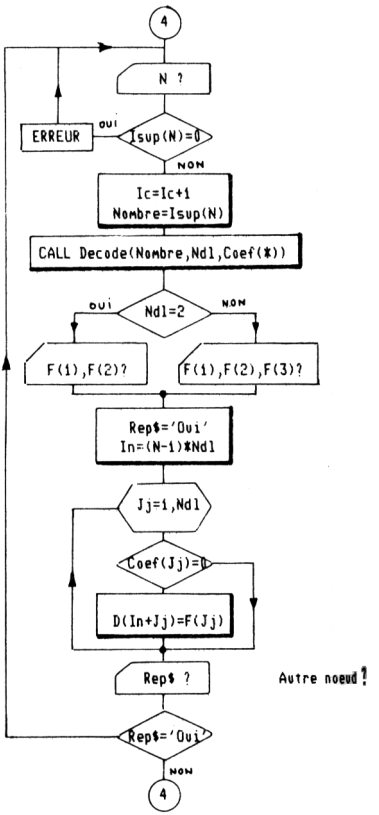
Temperature



Poids propre



Deplacements d'appuis



Comme dans la réalité il s'agit d'une déformation et non d'un état de contrainte, il faut sauvegarder ces efforts normaux équivalents de façon à en tenir compte au moment du calcul des efforts réels dans les barres.

4. Les déplacements d'appuis. On introduit le numéro du nœud (qui doit être obligatoirement un appui) et on calcule les charges nodales équivalentes conformément au sous-programme 'Genererdepl' exposé au paragraphe 2.8.

L'organigramme du sous-programme 'Second' est reproduit figure 35.

Listing du sous-programme 'Second' :

```
5640  ! ****************************************************************
5650  SUB Second
5660  ! ****************************************************************
5670  !
5680  ! Appelé par Prog. Princ.
5690  ! Appelle : Genereretemp, Genererdepl
5700  !
5710  OPTION BASE 1
5720  !
5730  ! Introduction du chargement, reproduction des charges
5740  ! et constitution du (ou des) seconds membres du système
5750  !
5760  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
5770  COM Titre$[80],Charges$(5)[80]
5780  COM X(200),Y(200),Z(200),E(10),Sect(30)
5790  COM INTEGER Liais(400,4),Isup(200)
5800  !
5810  COM Ndlb,Nn,Ntot
5820  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(601)
5830  COM A(6000),R(400,14)
5840  !
5850  DIM F(3),Coef(3),D(600)
5860  !
5870  Indice=Maxa(Nn+1)-Nn
5880  FOR I=1 TO Nchar
5890      Ic=0              ! Paramètre indiquant les déplacements d'appuis
5900      MAT D=(0)
5910      Indice=Indice+Nn ! Indice du 1er Coef. du vecteur second membre
5920      PRINT LIN(3)
5930      PRINT "CAS DE CHARGE N° ";I
5940      PRINT "-----------------"
5950      PRINT
5960      INPUT " Titre du cas de charge ?",Charges$(I)
5970      PRINT Charges$(I)
```

```
5980      PRINT
5990      Index=5
6000      DISP " NATURE DU CHARGEMENT ?"
6010      DISP " 1 : Charges aux noeuds"
6020      DISP " 2 : Poids propre"
6030      DISP " 3 : Température"
6040      DISP " 4 : Déplacement d'appui"
6050      INPUT " 5 : FIN",Index
6060      ON Index GOTO C1,C2,C3,C4,Nexti
6070      !
6080 C1:  ! Charges aux noeuds
6090      !
6100      PRINT "CHARGES AUX NOEUDS"
6110      PRINT " N° noeud   Fx      Fy      Fz"
6120      DISP "La description du chargement est achevée par la donnée"
6130      DISP "de la charge sur le dernier noeud"
6140      IF Ndl=2 THEN 6190
6150      INPUT " N° noeud, Fx, Fy, Fz",Inoeud,F(1),F(2),F(3)
6160      PRINT USING 6170;Inoeud,F(1),F(2),F(3)
6170      IMAGE X,DDD,2X,MDDD.DDD,2X,MDDD.DDD,2X,MDDD.DDD
6180      GOTO 6220
6190      INPUT " N° noeud, Fx, Fy",Inoeud,F(1),F(2)
6200      PRINT USING 6210;Inoeud,F(1),F(2)
6210      IMAGE X,DDD,2X,MDDD.DDD,2X,MDDD.DDD
6220      Ii=Indice+Ndl*(Inoeud-1)-1
6230      FOR K=1 TO Ndl
6240          A(Ii+K)=A(Ii+K)+F(K)
6250      NEXT K
6260      IF Inoeud=Nnoeuds THEN 5990
6270      GOTO 6120 ! Introduction de la charge sur le noeud suivant
6280      !
6290 C2:  ! Génération poids propre
6300      !
6310      PRINT "POIDS PROPRE (Toutes les barres sont prises en compte)"
6320      INPUT "Densité ?",Dens
6330      PRINT " Densité = ";Dens
6340      FOR L=1 TO Nbarres
6350          Ii=Liais(L,1)
6360          Jj=Liais(L,2)
6370          Kk=Liais(L,3)
6380          Long=(X(Jj)-X(Ii))^2+(Y(Jj)-Y(Ii))^2
6390          IF Ndl=2 THEN 6410
6400          Long=Long+(Z(Jj)-Z(Ii))^2
6410          Long=SQR(Long)
6420          Po=Long*Sect(Kk)*Dens/2
6430          Ii=Indice+(Ii-1)*Ndl+1
6440          Jj=Indice+(Jj-1)*Ndl+1
6450          A(Ii)=A(Ii)-Po
6460          A(Jj)=A(Jj)-Po
6470          !
6480          ! Sauvegarde du poids propre pour le calcul
6490          ! des efforts normaux et des réactions d'appuis.
6500          !
6510          R(L,I+9)=Po
```

```
6520      NEXT L
6530      GOTO 5990
6540      !
6550 C3:  ! Température
6560      !
6570      PRINT "TEMPERATURE"
6580      !
6590      DISP "N° première  barre, N° dernière  barre, Alpha et Température"
6600      DISP "d'un groupe de barres (Cas de charge terminé obligatoirement"
6610      DISP "avec le numéro de la dernière barre de la,structure"
6620      INPUT "N1, N2, Alpha, Temper ?",N1,N2,Alpha,Temper
6630      PRINT N1,N2,Alpha,Temper
6640      CALL Genertemp(N1,N2,Alpha,Temper,Indice,I)
6650      IF N2=Nbarres THEN 5990
6660      GOTO 6620      ! Lecture du groupe de barres suivant
6670      !
6680 C4:  ! Déplacements d'appuis
6690      !
6700      PRINT "DEPLACEMENTS IMPOSES DES APPUIS"
6710      !
6720      INPUT " N° du Noeud ?",N
6730      IF Isup(N)=0 THEN Erreur
6740      Ic=Ic+1
6750      Nombre=Isup(N)
6760      CALL Decode(Nombre,Ndl,Coef(*))
6770      IF Ndl=2 THEN 6810
6780      INPUT "DeltaX, DeltaY, DeltaZ ?",F(1),F(2),F(3)
6790      PRINT "Noeud N° ";N," Dx = ";F(1)," Dy = ";F(2)," Dz = ";F(3)
6800      GOTO 6830
6810      INPUT "DeltaX, DeltaY ?",F(1),F(2)
6820      PRINT "Noeud N° ";N," Dx = ";F(1)," Dy = ";F(2)
6830      Rep$="Oui"
6840      In=(N-1)*Ndl
6850      !
6860      ! Seuls les déplacements imposés correspondants à des degrés de
6870      ! liberté bloqués sont pris en compte et placés dans le vecteur D
6880      !
6890      FOR Jj=1 TO Ndl
6900          IF Coef(Jj)=0 THEN 6920
6910          D(In+Jj)=F(Jj)
6920      NEXT Jj
6930      INPUT "Autre déplacement d'appui (Oui) ?",Rep$
6940      IF Rep$="Oui" THEN 6720
6950      GOTO 5990
6960 Erreur: DISP "Le noeud n'est pas un appui"
6970      GOTO 6720
6980 Nexti:!
6990  !
7000  ! Modification du second membre en fonction des déplacements d'appuis
7010  !
7020  CALL Genererdepl(Indice,Ic,Nn,Ndlb,D(*),A(*),Iappui(*),Maxa(*))
7030  !
7040  NEXT I
7050  SUBEXIT
7060  SUBEND
```

3.9 - CHARGES NODALES D'ORIGINE THERMIQUE

Les charges d'origine thermique sont définies par la donnée d'un groupe de barres soumises à la même variation de température et possédant le même coefficient de dilatation. Le sous-programme 'Generertemp' génère alors les forces nodales équivalentes dans le système d'axes global à partir des caractéristiques des barres rangées dans le tableau 'R'.

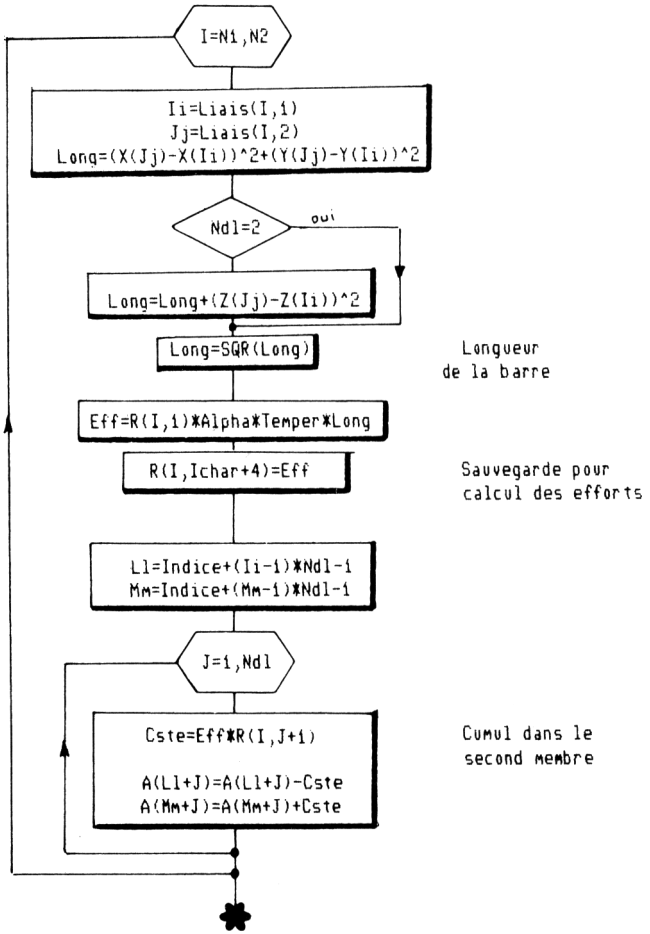


Fig. 36. - Organigramme du sous-programme 'Generertemp'.

De plus, il faut conserver la valeur de cet effort normal produisant la même déformation de la barre, ES $\alpha\Delta t$ et servant à déterminer les charges nodales. En effet, puisque cet effort n'existe pas, et que dans la réalité on a une déformation, lors du calcul des efforts normaux à partir des déplacements et des matrices de rigidité il faudra le soustraire. Comme le programme est dimensionné avec 5 de charges, ces efforts normaux équivalents sont rangés dans le tableau 'R', colonnes 5 à 9.

La description des charges d'origine thermique est achevée par la donnée d'un groupe de barres incluant la dernière barre de la structure, même si celle-ci n'est pas soumise à un effet thermique.

L'organigramme du sous-programme 'Generertemp' est donné figure 36.

Listing du sous-programme 'Generertemp' :

```
7070  ! ****************************************************************
7080  SUB Generertemp(N1,N2,Alpha,Temper,Indice,Ichar)
7090  ! ****************************************************************
7100  !
7110  ! Appelé par Second
7120  !
7130  OPTION BASE 1
7140  !
7150  ! Genère les charges nodales dues à la température
7160  !
7170  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
7180  COM Titre$[80],Charge$(5)[80]
7190  COM X(200),Y(200),Z(200),E(10),Sect(30)
7200  COM INTEGER Liais(400,4),Isup(200)
7210  !
7220  COM Ndlb,Nn,Ntot
7230  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(601)
7240  COM A(6000),R(400,14)
7250  FOR I=N1 TO N2
7260      Ii=Liais(I,1)
7270      Jj=Liais(I,2)
7280      Long=(X(Jj)-X(Ii))^2+(Y(Jj)-Y(Ii))^2
7290      IF Ndl=3 THEN Long=Long+(Z(Jj)-Z(Ii))^2
7300      Long=SQR(Long)
7310      Eff=R(I,1)*Alpha*Temper*Long
7320      R(I,Ichar+4)=Eff
7330      !
7340      ! Calcul des compsantes des forces dues à la
7350      ! température et cumul
7360      !
```

```
7370      Ll=Indice+(Ii-1)*Ndl-1
7380      Mm=Indice+(Jj-1)*Ndl-1
7390      !
7400      FOR J=1 TO Ndl
7410          Cste=Eff*R(I,J+1)
7420          A(Ll+J)=A(Ll+J)-Cste
7430          A(Mm+J)=A(Mm+J)+Cste
7440      NEXT J
7450  NEXT I
7460  SUBEXIT
7470  SUBEND
```

3.10 - IMPRESSION DES DÉPLACEMENTS

Le sous-programme 'Depl' imprime les déplacements après résolution du système linéaire. Il s'agit, en fait, d'extraire du tableau 'A' les coefficients correspondant au second membre : à la fin de la procédure de résolution du système linéaire, les coefficients du second membre, initialement les charges nodales, sont maintenant les composantes des déplacements des nœuds.

La seule particularité de cette séquence consiste dans la présentation des résultats, suivant que la structure est plane ou spatiale. L'organigramme ne présentant aucun intérêt, nous ne donnons que le listing reproduit ci-dessous :

Listing du sous-programme 'Depl' :

```
9460  ! ************************************************************
9470  SUB Depl(Indice,Ndl,Nnoeuds,A(*))
9480  ! ************************************************************
9490  !
9500  ! Appelé par Prog. Princ.
9510  !
9520  OPTION BASE 1
9530  !
9540  ! Impression des déplacements
9550  !
9560  PRINT LIN(1)
9570  PRINT "D E P L A C E M E N T S   D E S   N OE U D S"
9580  PRINT
```

```
9590  IF Ndl=2 THEN 9620
9600  PRINT " N° Noeud        Dx              Dy              Dz"
9610  GOTO 9630
9620  PRINT " N° Noeud        Dx              Dy"
9630  PRINT
9640  FOR I=1 TO Nnoeuds
9650      Ii=Indice+(I-1)*Ndl
9660      IF Ndl=2 THEN 9760
9670      !
9680      ! Ossature spatiale
9690      !
9700      PRINT USING 9710;I,A(Ii),A(Ii+1),A(Ii+2)
9710      IMAGE 3X,DDD,5X,MD.DDDDDDE,2X,MD.DDDDDDE,2X,MD.DDDDDDE
9720      GOTO 9780
9730      !
9740      ! Ossature plane
9750      !
9760      PRINT USING 9770;I,A(Ii),A(Ii+1)
9770      IMAGE 3X,DDD,5X,MD.DDDDDDE,2X,MD.DDDDDDE
9780  NEXT I
9790  SUBEXIT
9800  SUBEND
```

3.11 - EFFORTS ET RÉACTIONS D'APPUIS

Les efforts normaux aux extrémités des barres sont calculés à partir des déplacements des nœuds. Les réactions d'appui sont obtenues ensuite par cumul des actions des barres reliées à un nœud appui. L'organigramme du sous-programme 'Effn' est donné figure 37.

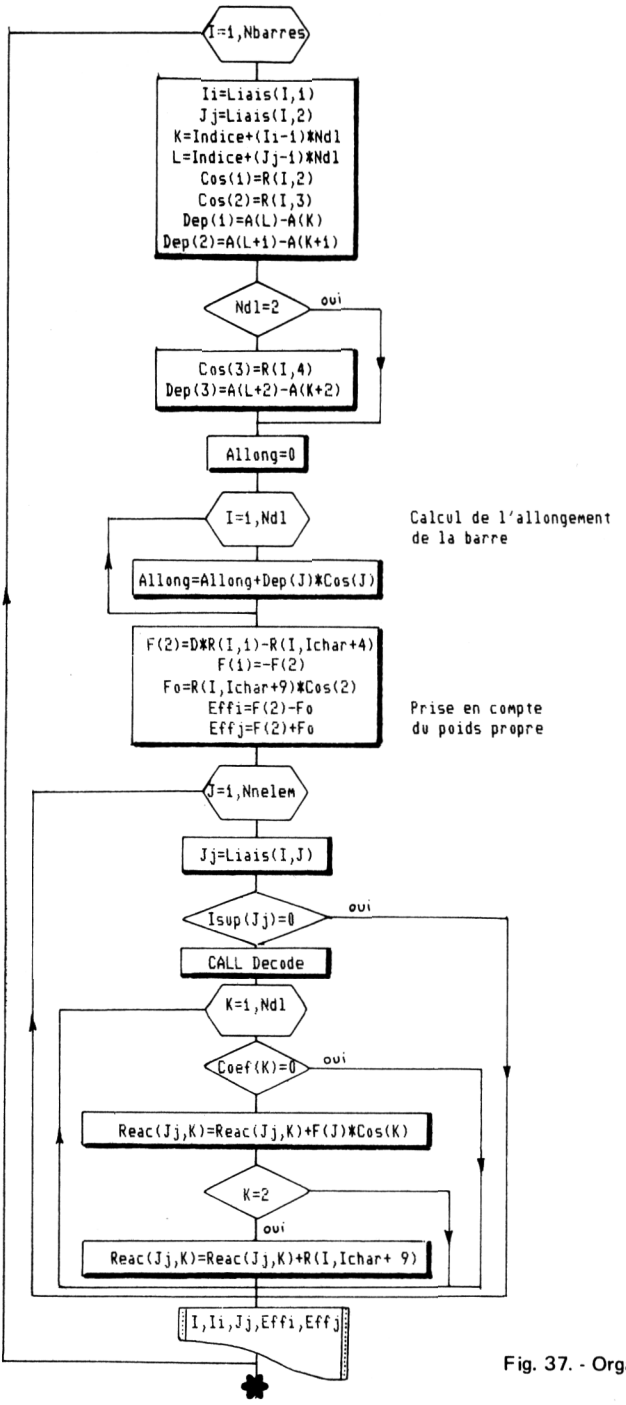


Fig. 37. - Organigramme 'Effn'.

Listing du sous-programme 'Effn' :

```
9810  ! ************************************************************
9820  SUB Effn(Indice,Ichar)
9830  ! ************************************************************
9840  !
9850  ! Appelé par Prog. Princ.
9860  !
9870  OPTION BASE 1
9880  !
9890  ! Calcul et impression des efforts dans les barres.
9900  ! Calcul et impression des réactions d'appuis.
9910  !
9920  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
9930  COM Titre$[80],Charges$(5)[80]
9940  COM X(200),Y(200),Z(200),E(10),Set(30)
9950  COM INTEGER Liais(400,4),Isup(200)
9960  !
9970  COM Ndlb,Nn,Ntot
9980  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(601)
9990  COM A(6000),R(400,14)
10000 !
10010 DIM Coef(3),Cos(3),Reac(200,3),F(2),Dep(3)
10020 PRINT LIN(1)
10030 PRINT " E F F O R T S   D A N S   L E S   B A R R E S  ( + Traction)"
10040 PRINT
10050 PRINT " N° Barre   N° Orig.   N° Extr.   Eff. Norm. Or.   Eff. Norm. Ex."
10060 PRINT
10070 FOR I=1 TO Nbarres
10080     Ii=Liais(I,1)
10090     Jj=Liais(I,2)
10100     K=Indice+(Ii-1)*Ndl
10110     L=Indice+(Jj-1)*Ndl
10120     Cos(1)=R(I,2)
10130     Cos(2)=R(I,3)
10140     Dep(1)=A(L)-A(K)
10150     Dep(2)=A(L+1)-A(K+1)
10160     IF Ndl=2 THEN 10190
10170     Cos(3)=R(I,4)
10180     Dep(3)=A(L+2)-A(K+2)
10190     Allong=0
10200     FOR J=1 TO Ndl
10210         Allong=Allong+Dep(J)*Cos(J)
10220     NEXT J
10230     !
10240     ! Effort normal dans la barre
10250     !
10260     F(2)=Allong*R(I,1)-R(I,Ichar+4) ! Force à l'extrémité
10270     F(1)=-F(2)                      ! Force à l'origine
10280     !
10290     ! Variation de l'effort normal due au poids propre
10300     !
```

```
10310     Fo=R(I,Ichar+9)*Cos(2)
10320     Effi=F(2)-Fo  ! Effort normal à l'origine
10330     Effj=F(2)+Fo  ! Effort normal à l'extrémité
10340     !
10350     ! Calcul des Réactions d'appui.
10360     !
10370     FOR J=1 TO Nnelem
10380         Jj=Liais(I,J)
10390         IF Isup(Jj)=0 THEN 10510
10400         Nombre=Isup(Jj)
10410         CALL Decode(Nombre,Ndl,Coef(*))
10420         FOR K=1 TO Ndl
10430             IF Coef(K)=0 THEN 10500
10440             Reac(Jj,K)=Reac(Jj,K)+F(J)*Cos(K)
10450             !
10460             ! Addition des charges nodales provenant du poids
10470             ! propre (Direction Y (K=2) seule concernée)
10480             !
10490             IF K=2 THEN Reac(Jj,K)=Reac(Jj,K)+R(I,Ichar+9)
10500         NEXT K
10510     NEXT J
10520     !
10530     ! Impression des efforts normaux
10540     !
10550     PRINT USING 10560;I,Ii,Jj,Effi,Effj
10560     IMAGE 4X,DDD,8X,DDD,8X,DDD,2(5X,MDDDDDD.DDD)
10570 NEXT I
10580 !
10590 ! Impression des Réactions d'appuis.
10600 !
10610 PRINT LIN(1)
10620 PRINT "R E A C T I O N S   D ' A P P U I S"
10630 PRINT
10640 IF Ndl=2 THEN 10670
10650 PRINT " N° Noeud        Rx              Ry              Rz"
10660 GOTO 10680
10670 PRINT " N° Noeud        Rx              Ry"
10680 PRINT
10690 FOR I=1 TO Nnoeuds
10700     IF Isup(I)=0 THEN 10770
10710     IF Ndl=2 THEN 10750
10720     PRINT USING 10730;I,Reac(I,1),Reac(I,2),Reac(I,3)
10730     IMAGE 3X,DDD,3X,3(2X,MD.DDDDDDE)
10740     GOTO 10770
10750     PRINT USING 10730;I,Reac(I,1),Reac(I,2)
10760     IMAGE 3X,DDD,3X,2(2X,MD.DDDDDDE)
10770 NEXT I
10780 SUBEXIT
10790 SUBEND
```

3.12 - EXEMPLE DE CALCUL D'UNE OSSATURE PLANE

L'exemple suivant concerne une poutre à treillis. La définition géométrique ainsi que les chargements sont précisés figure 38 et dans la reproduction des données.

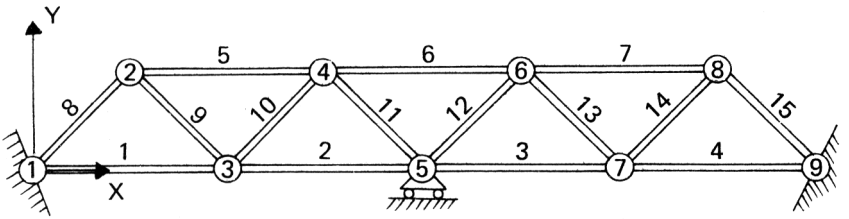


Fig. 38. - Test structure plane.

Les données sont reproduites ci-dessous :

```
TITRE : TEST STRUCTURE PLANE

 Ossature plane axe Y vertical

Nombre de noeuds =  9
Nombre de barres =  15
Nombre de cas de charges =  4
Nombre de sections différentes =  1
Nombre de modules d'élasticité =  1


COORDONNEES DES NOEUDS

 N°        X            Y       Code appui

  1      0.000        0.000          11
  2      2.000        2.000           0
  3      4.000        0.000           0
  4      6.000        2.000           0
  5      8.000        0.000           1
  6     10.000        2.000           0
  7     12.000        0.000           0
  8     14.000        2.000           0
  9     16.000        0.000          11
```

DEFINITION DES LIAISONS

N°	Origine	Extrémité	N° Sect.	N° Module
1	1	3	1	1
2	3	5	1	1
3	5	7	1	1
4	7	9	1	1
5	2	4	1	1
6	4	6	1	1
7	6	8	1	1
8	1	2	1	1
9	3	2	1	1
10	3	4	1	1
11	5	4	1	1
12	5	6	1	1
13	7	6	1	1
14	7	8	1	1
15	9	8	1	1

SECTIONS DES BARRES

Section N° 1 = .002

MODULES D'ELASTICITE

Module N° 1 = 21000000

CAS DE CHARGE N° 1

Charge noeud 3 P=-20

CHARGES AUX NOEUDS

N° noeud	Fx	Fy	Fz
3	0.000	-20.000	
9	0.000	0.000	

CAS DE CHARGE N° 2

Poids propre

POIDS PROPRE (Toutes les barres sont prises en compte)
Densité = 8

CAS DE CHARGE N° 3

Elévation de température 20°

TEMPERATURE

1	15	0000125	20

CAS DE CHARGE N° 4

Déplacement appui 5 de -0.01

DEPLACEMENTS IMPOSES DES APPUIS
Noeud N° 5 Dx = 0 Dy = - 01

RESULTATS

CAS DE CHARGE N° 1
==========
Charge noeud 3 P=-20

D E P L A C E M E N T S D E S N OE U D S

N° Noeud	Dx	Dy
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	1.517159E-03	-2.726991E-03
3	5.730911E-04	-4.880891E-03
4	-1.938013E-04	-2.630091E-03
5	9.523810E-04	0.000000E+00
6	1.938013E-04	6.215414E-04
7	3.792898E-04	6.699918E-04
8	3.876026E-04	5.246408E-04
9	0.000000E+00	0.000000E+00

E F F O R T S D A N S L E S B A R R E S (+ Traction)

N° Barre	N° Orig.	N° Extr.	Eff. Norm. Or.	Eff. Norm. Ex.
1	1	3	6.017	6.017
2	3	5	3.983	3.983
3	5	7	-6.017	-6.017
4	7	9	-3.983	-3.983
5	2	4	-17.965	-17.965
6	4	6	4.070	4.070
7	6	8	2.035	2.035
8	1	2	-12.703	-12.703
9	3	2	12.703	12.703
10	3	4	15.581	15.581
11	5	4	-15.581	-15.581
12	5	6	-1.439	-1.439
13	7	6	1.439	1.439
14	7	8	-1.439	-1.439
15	9	8	1.439	1.439

R E A C T I O N S D ' A P P U I S

N° Noeud	Rx	Ry
1	2.965086E+00	8.982543E+00
5	0.000000E+00	1.203491E+01
9	-2.965086E+00	-1.017457E+00

CAS DE CHARGE N° 2
==========
Poids propre

D E P L A C E M E N T S D E S N OE U D S

N° Noeud	Dx	Dy
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	1.112723E-05	-2.708276E-05
3	1.277948E-06	-4.248235E-05
4	-4.079705E-06	-2.795981E-05
5	-4.000000E-17	0.000000E+00
6	4.079705E-06	-2.795981E-05
7	-1.277948E-06	-4.248235E-05
8	-1.112723E-05	-2.708276E-05
9	0.000000E+00	0.000000E+00

E F F O R T S D A N S L E S B A R R E S (+ Traction)

N° Barre	N° Orig.	N° Extr.	Eff. Norm. Or.	Eff. Norm. Ex.
1	1	3	.013	.013
2	3	5	-.013	-.013
3	5	7	-.013	-.013
4	7	9	.013	.013
5	2	4	-.160	-.160
6	4	6	.086	.086
7	6	8	-.160	-.160
8	1	2	-.184	-.152
9	3	2	.042	.074
10	3	4	.080	.112
11	5	4	-.267	-.235
12	5	6	-.267	-.235
13	7	6	.080	.112
14	7	8	.042	.074
15	9	8	-.184	-.152

R E A C T I O N S D ' A P P U I S

N° Noeud	Rx	Ry
1	1.050454E-01	1.730912E-01
5	0.000000E+00	4.638562E-01
9	-1.050454E-01	1.730912E-01

CAS DE CHARGE N° 3
==========
Elévation de température 20°

D E P L A C E M E N T S D E S N O E U D S

N° Noeud	Dx	Dy
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	-6.860346E-04	1.398254E-03
3	-2.034914E-04	5.930173E-04
4	-9.301728E-05	1.194763E-03
5	5.400000E-15	0.000000E+00
6	9.301728E-05	1.194763E-03
7	2.034914E-04	5.930173E-04
8	6.860346E-04	1.398254E-03
9	0.000000E+00	0.000000E+00

E F F O R T S D A N S L E S B A R R E S (+ Traction)

N° Barre	N° Orig.	N° Extr.	Eff. Norm. Or.	Eff. Norm. Ex.
1	1	3	-12.637	-12.637
2	3	5	-8.363	-8.363
3	5	7	-8.363	-8.363
4	7	9	-12.637	-12.637
5	2	4	-4.273	-4.273
6	4	6	-8.547	-8.547
7	6	8	-4.273	-4.273
8	1	2	-3.022	-3.022
9	3	2	3.022	3.022
10	3	4	-3.022	-3.022
11	5	4	3.022	3.022
12	5	6	3.022	3.022
13	7	6	-3.022	-3.022
14	7	8	3.022	3.022
15	9	8	-3.022	-3.022

R E A C T I O N S D ' A P P U I S

N° Noeud	Rx	Ry
1	1.477332E+01	2.136659E+00
5	0.000000E+00	-4.273319E+00
9	-1.477332E+01	2.136659E+00

CAS DE CHARGE N° 4
==========
Déplacement appui 5 de -0.01

D E P L A C E M E N T S D E S N OE U D S

N° Noeud	Dx	Dy
1	0.000000E+00	0.000000E+00
2	2.034914E-03	-2.754364E-03
3	-5.087284E-04	-6.017457E-03
4	1.017457E-03	-8.263093E-03
5	-1.700000E-14	-1.000000E-02
6	-1.017457E-03	-8.263093E-03
7	5.087284E-04	-6.017457E-03
8	-2.034914E-03	-2.754364E-03
9	0.000000E+00	0.000000E+00

E F F O R T S D A N S L E S B A R R E S (+ Traction)

N° Barre	N° Orig.	N° Extr.	Eff. Norm. Or.	Eff. Norm. Ex.
1	1	3	-5.342	-5.342
2	3	5	5.342	5.342
3	5	7	5.342	5.342
4	7	9	-5.342	-5.342
5	2	4	-10.683	-10.683
6	4	6	-21.367	-21.367
7	6	8	-10.683	-10.683
8	1	2	-7.554	-7.554
9	3	2	7.554	7.554
10	3	4	-7.554	-7.554
11	5	4	7.554	7.554
12	5	6	7.554	7.554
13	7	6	-7.554	-7.554
14	7	8	7.554	7.554
15	9	8	-7.554	-7.554

R E A C T I O N S D ' A P P U I S

N° Noeud	Rx	Ry
1	1.068330E+01	5.341648E+00
5	0.000000E+00	-1.068330E+01
9	-1.068330E+01	5.341648E+00

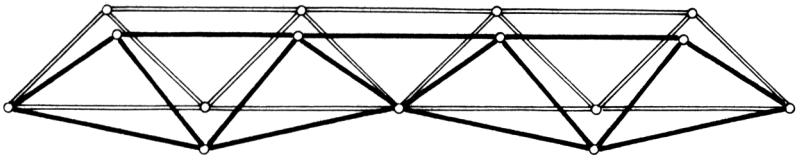


Fig. 39. - Déformation sous poids propre

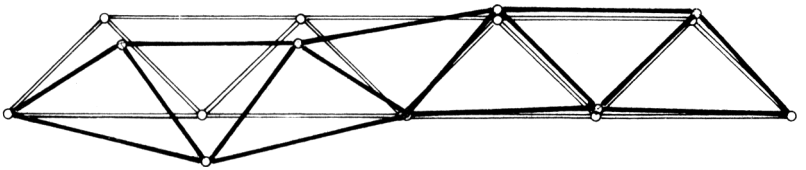


Fig. 40. - Déformation sous charge nœud 3

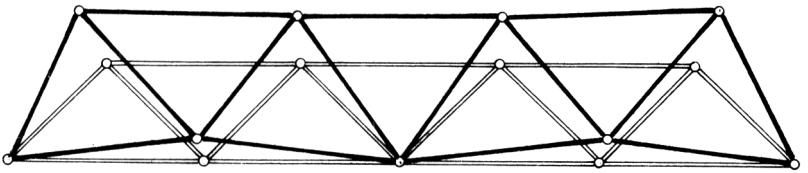


Fig. 41. - Déformation sous élévation de température

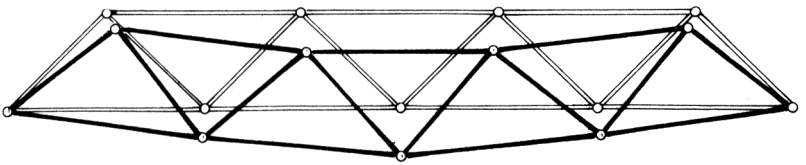


Fig. 42. - Déformation sous déplacement de l'appui 5

3.13 - EXEMPLE DE CALCUL D'UNE OSSATURE SPATIALE

La charpente tridimensionnelle présentée ici à titre d'illustration du calcul d'une ossature spatiale présente un grand nombre de

données. Celles-ci ne seront donc reproduites que partiellement. Les résultats sont visualisés à l'aide de dessins, ce qui met en évidence la nécessité des sous-programmes de représentation graphique.

La définition géométrique de la structure et des cas de charges est présentée ci-dessous.

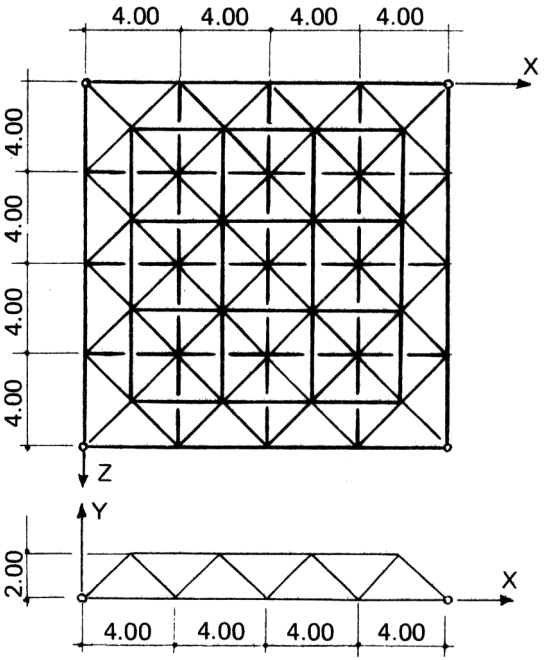


Fig. 43. - Définition de la structure spatiale

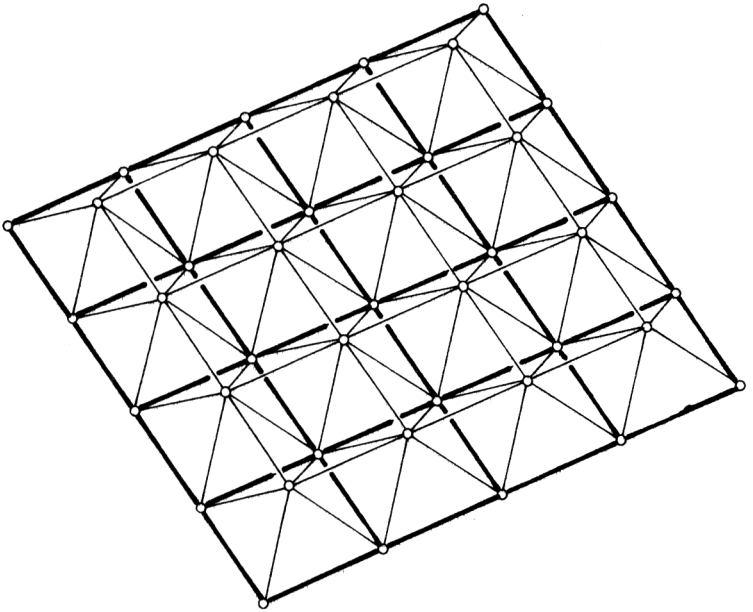


Fig. 44. - Perspective de la structure spatiale

TITRE : TEST STRUCTURE SPATIALE

Ossature spatiale axe Y vertical

Nombre de noeuds = 41
Nombre de barres = 128
Nombre de cas de charges = 2
Nombre de sections différentes = 1
Nombre de modules d'élasticité = 1

COORDONNEES DES NOEUDS

N°	X	Y	Z	Code appui
1	0.000	0.000	0.000	111
2	4.000	0.000	0.000	0
3	8.000	0.000	0.000	0
4	12.000	0.000	0.000	0
5	16.000	0.000	0.000	111
6	2.000	2.000	2.000	0
7	6.000	2.000	2.000	0
8	10.000	2.000	2.000	0

9	14.000	2.000	2.000	0
10	0.000	0.000	4.000	0
11	4.000	0.000	4.000	0
12	8.000	0.000	4.000	0
13	12.000	0.000	4.000	0
14	16.000	0.000	4.000	0
15	2.000	2.000	6.000	0
16	6.000	2.000	6.000	0
17	10.000	2.000	6.000	0
18	14.000	2.000	6.000	0
19	0.000	0.000	8.000	0
20	4.000	0.000	8.000	0
21	8.000	0.000	8.000	0
22	12.000	0.000	8.000	0
23	16.000	0.000	8.000	0
24	2.000	2.000	10.000	0
25	6.000	2.000	10.000	0
26	10.000	2.000	10.000	0
27	14.000	2.000	10.000	0
28	0.000	0.000	12.000	0
29	4.000	0.000	12.000	0
30	8.000	0.000	12.000	0
31	12.000	0.000	12.000	0
32	16.000	0.000	12.000	0
33	2.000	2.000	14.000	0
34	6.000	2.000	14.000	0
35	10.000	2.000	14.000	0
36	14.000	2.000	14.000	0
37	0.000	0.000	16.000	111
38	4.000	0.000	16.000	0
39	8.000	0.000	16.000	0
40	12.000	0.000	16.000	0
41	16.000	0.000	16.000	111

DEFINITION DES LIAISONS

N°	Origine	Extrémité	N° Sect.	N° Module					
1	1	2	1	1	12	22	23	1	1
2	2	3	1	1	13	28	29	1	1
3	3	4	1	1	14	29	30	1	1
4	4	5	1	1	15	30	31	1	1
5	10	11	1	1	16	31	32	1	1
6	11	12	1	1	17	37	38	1	1
7	12	13	1	1	18	38	39	1	1
8	13	14	1	1	19	39	40	1	1
9	19	20	1	1	20	40	41	1	1
10	20	21	1	1	21	1	10	1	1
11	21	22	1	1	22	10	19	1	1

23	19	28	1	1	76	13	8	1	1
24	28	37	1	1	77	5	9	1	1
25	2	11	1	1	78	4	9	1	1
26	11	20	1	1	79	13	9	1	1
27	20	29	1	1	80	14	9	1	1
28	29	38	1	1	81	11	15	1	1
29	3	12	1	1	82	10	15	1	1
30	12	21	1	1	83	19	15	1	1
31	21	30	1	1	84	20	15	1	1
32	30	39	1	1	85	12	16	1	1
33	4	13	1	1	86	11	16	1	1
34	13	22	1	1	87	20	16	1	1
35	22	31	1	1	88	21	16	1	1
36	31	40	1	1	89	13	17	1	1
37	5	14	1	1	90	12	17	1	1
38	14	23	1	1	91	21	17	1	1
39	23	32	1	1	92	22	17	1	1
40	32	41	1	1	93	14	18	1	1
41	6	7	1	1	94	13	18	1	1
42	7	8	1	1	95	22	18	1	1
43	8	9	1	1	96	23	18	1	1
44	15	16	1	1	97	20	24	1	1
45	16	17	1	1	98	19	24	1	1
46	17	18	1	1	99	28	24	1	1
47	24	25	1	1	100	29	24	1	1
48	25	26	1	1	101	21	25	1	1
49	26	27	1	1	102	20	25	1	1
50	33	34	1	1	103	29	25	1	1
51	34	35	1	1	104	30	25	1	1
52	35	36	1	1	105	22	26	1	1
53	6	15	1	1	106	21	26	1	1
54	15	24	1	1	107	30	26	1	1
55	24	33	1	1	108	31	26	1	1
56	7	16	1	1	109	23	27	1	1
57	16	25	1	1	110	22	27	1	1
58	25	34	1	1	111	31	27	1	1
59	8	17	1	1	112	32	27	1	1
60	17	26	1	1	113	29	33	1	1
61	26	35	1	1	114	28	33	1	1
62	9	18	1	1	115	37	33	1	1
63	18	27	1	1	116	38	33	1	1
64	27	36	1	1	117	30	34	1	1
65	1	6	1	1	118	29	34	1	1
66	2	6	1	1	119	38	34	1	1
67	10	6	1	1	120	39	34	1	1
68	11	6	1	1	121	31	35	1	1
69	2	7	1	1	122	30	35	1	1
70	11	7	1	1	123	39	35	1	1
71	12	7	1	1	124	40	35	1	1
72	3	7	1	1	125	32	36	1	1
73	4	8	1	1	126	31	36	1	1
74	3	8	1	1	127	40	36	1	1
75	12	8	1	1	128	41	36	1	1

SECTIONS DES BARRES

Section N° 1 = .002

MODULES D'ELASTICITE

Module N° 1 = 21000000

CAS DE CHARGE N° 1

Poids propre

POIDS PROPRE (Toutes les barres sont prises en compte)
Densité = 8

CAS DE CHARGE N° 2

Rotation globale autour des appuis 1 et 37

DEPLACEMENTS IMPOSES DES APPUIS

Noeud N° 1	Dx = 0	Dy = .01	Dz = 0
Noeud N° 37	Dx = 0	Dy = -.01	Dz = 0

RESULTATS

CAS DE CHARGE N° 1
==========
Poids propre

R E A C T I O N S D ' A P P U I S

N° Noeud	Rx	Ry	Rz
1	2.467655E+00	1.910810E+00	2.467655E+00
5	-2.467655E+00	1.910810E+00	2.467655E+00
37	2.467655E+00	1.910810E+00	-2.467655E+00
41	-2.467655E+00	1.910810E+00	-2.467655E+00

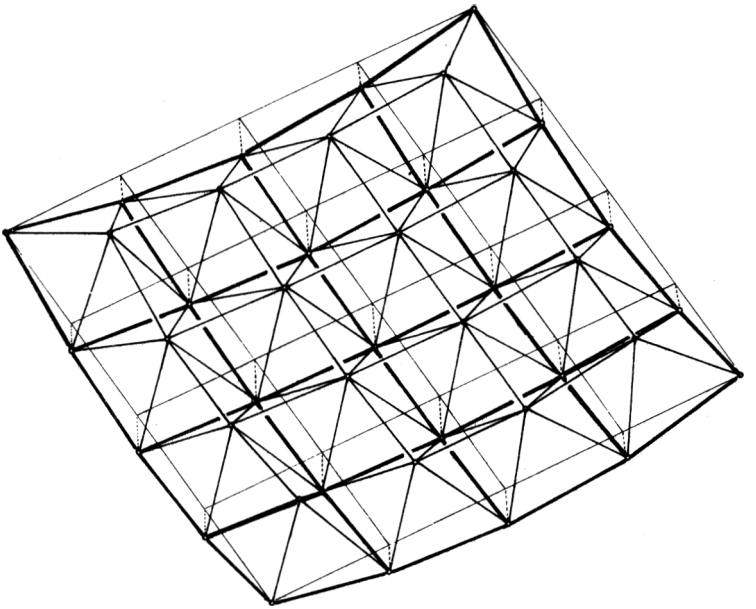


Fig. 45. - Déformation sous poids propre.

CAS DE CHARGE N° 2
==========
Rotation globale autour des appuis 1 et 37

D E P L A C E M E N T S D E S N O E U D S

N° Noeud	Dx	Dy	Dz
1	0.000000E+00	1.000000E-02	0.000000E+00
2	-2.438669E-04	7.793817E-03	-1.331963E-04
3	-3.227065E-04	5.000000E-03	1.652000E-13
4	-2.438669E-04	2.206183E-03	1.331963E-04
5	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
6	8.349702E-04	6.868865E-03	2.084970E-03
7	8.374197E-04	4.819411E-03	1.545546E-03
8	8.374197E-04	2.680589E-03	9.544542E-04
9	8.349702E-04	6.311354E-04	4.150298E-04
10	-1.331963E-04	5.293817E-03	-2.438669E-04

R E A C T I O N S D ' A P P U I S

N° Noeud	Rx	Ry	Rz
1	3.414137E+00	8.535343E-01	3.414137E+00
5	3.414137E+00	-8.535343E-01	-3.414137E+00
37	-3.414137E+00	-8.535343E-01	3.414137E+00
41	-3.414137E+00	8.535343E-01	-3.414137E+00

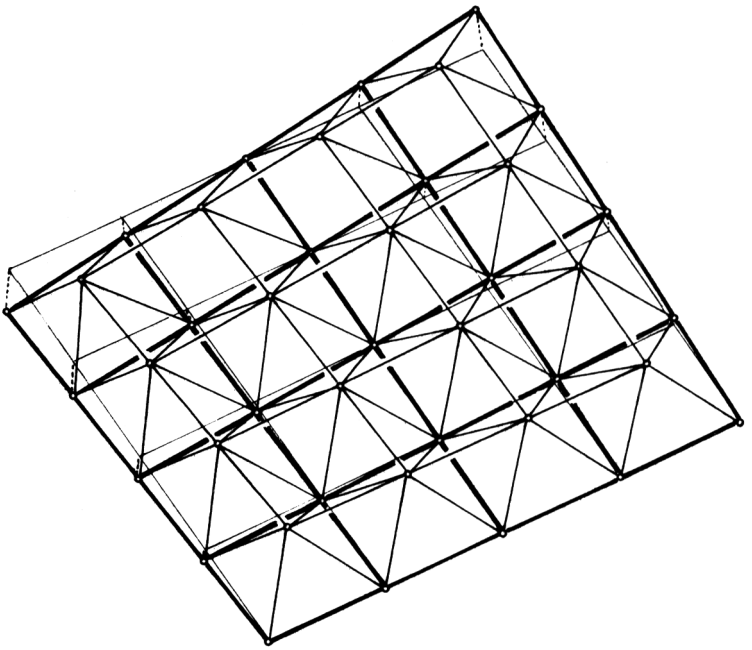


Fig. 46. - Déformation sous déplacements d'appuis.

4 LES POUTRES CONTINUES

4.1 - GÉNÉRALITÉS

Une poutre continue est une poutre droite reposant sur des appuis et soumise à des charges s'exerçant perpendiculairement à la fibre moyenne. Le problème que l'on se propose de résoudre consiste à déterminer les déplacements, les réactions d'appuis et les sollicitations dans la poutre sous l'action de charges extérieures (fig. 47).

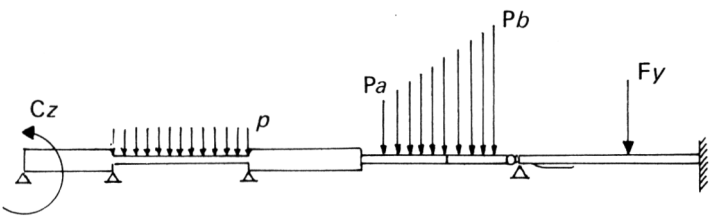


Fig. 47. - Poutre continue chargée perpendiculairement à sa fibre moyenne.

La théorie du calcul des structures élastiques débouche sur deux approches différentes :

1. La méthode des forces, qui consiste à effectuer des coupures dans la poutre de manière à la rendre isostatique, puis à déterminer

les forces nécessaires pour rétablir la continuité. Cette méthode, dans le cas des poutres continues, se ramène à une série d'équations dites 'équations des trois moments'.

2. La méthode des déplacements, qui prend comme inconnues les déplacements d'un certain nombre de points de la poutre et détermine les valeurs de ces déplacements de façon à réaliser l'équilibre de l'ensemble.

Comme nous avons axé l'ouvrage sur la méthode des déplacements, c'est celle que nous allons utiliser. De plus, cette méthode permet plus facilement de prendre en compte les diverses particularités de la structure, même si dans certains cas particuliers la méthode des forces est plus efficace (lignes d'influence).

4.2 - DÉFINITION DES DONNÉES ET NOTATIONS

Le fait qu'une poutre continue est constituée d'une succession d'éléments linéaires impose logiquement une numérotation naturelle des appuis et des travées. Nous supposerons que tous les tronçons sont de caractéristiques constantes. Cette restriction se justifie pour deux raisons : il est possible d'introduire des points intermédiaires de façon à suivre au mieux les variations des caractéristiques, ou bien il sera possible de créer des séquences de calcul spécifiques tenant compte de la variation de l'inertie et de la section.

Le nombre de nœuds est au moins égal au nombre d'appuis de la poutre continue, mais il peut être supérieur. Le nombre de tronçons sera égal au nombre de nœuds moins un (fig. 48).

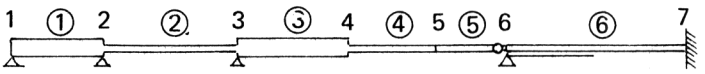
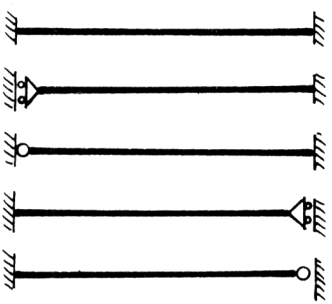


Fig. 48. - Numérotation des nœuds et des barres.

Afin de n'apporter aucune modification aux sous-programmes généraux, nous utiliserons le tableau des connexions 'Liais'. Chaque tronçon sera caractérisé par sa longueur et ses caractéristiques : inertie, module d'élasticité, éventuellement section réduite permettant de tenir compte des déformations dues à l'effort tranchant.

Le déplacement de chaque nœud est défini par sa flèche (déplacement vertical) et sa rotation. Il y a donc deux degrés de liberté par nœud. Si les deux composantes sont nulles, on est en présence d'un encastrement rigide. Si seule la flèche est nulle, on est en présence d'un appui simple. Le cas où seule la rotation est nulle est plus rare, mais sera envisagé.

Afin de rendre le programme plus général, nous avons tenu compte de la possibilité d'introduire des articulations aux extrémités des barres : soit on libère le moment fléchissant, soit on libère l'effort tranchant. Cela est précisé par un code défini figure 49.



Liais (I, 5) = 0

Liais (I, 5) = 1000

Liais (I, 5) = 100

Liais (I, 5) = 10

Liais (I, 5) = 1

Fig. 49. - Convention utilisée pour la définition des rotules.

Le listing du programme principal, où les principales modifications portent sur la définition des variables, est reproduit ci-dessous :

Listing du programme 'Poutr' :

```
10   ! ********************************************************
20   ! *                                                      *
30   ! *            CALCUL DES POUTRES CONTINUES              *
40   ! *                                                      *
50   ! *          PAR LA METHODE DES DEPLACEMENTS             *
60   ! *                                                      *
70   ! *   ******      ***     *     *   *******   ******     *
80   ! *   *     *    *   *    *     *      *      *     *   *
90   ! *   *     *   *     *   *     *      *      *     *   *
100  ! *   ******    *     *   *     *      *      ******     *
110  ! *   *         *     *   *     *      *      *    *     *
120  ! *   *          *   *    *     *      *      *     *   *
130  ! *   *           ***      *****       *      *     *   *
140  ! *                                                      *
150  ! ********************************************************
```

```
160  !
170  ! BLOC COMMUN
180  OPTION BASE 1
190  PRINTER IS 7,1
200  !
210  ! Définition des variables
220  !
230  ! 1°/ VARIABLES DEFINISSANT LE PROBLEME
240  !
250  ! Nnoeuds...........Nombre de noeuds
260  ! Nbarres...........Nombre de liaisons
270  ! Nchar.............Nombre de cas de charges
280  ! Ndl...............Nombre de degrés de liberté par noeud
290  !                   Ndl = 2 Poutre continue
300  !
310  ! Nnelem............Nombre de noeuds d'un élément
320  !                   Nnelem = 2 pour une barre (2 noeuds)
330  ! Nmodul............Nombre de modules d'élasticité
340  ! Nsect.............Nombre de sections différentes
350  ! Titre$...........Titre du probleme
360  ! Charges$.........Titres des cas de charge
370  ! X(I)..............Abscisse du noeud I
380  ! Isup(I) .........Code appui : Nombre de 2 chiffres = poutre continue
390  !                   = 00 Noeud libre
400  !                   = 10 Noeud bloqué suivant Y
410  !                   =  1 Noeud bloqué en rotation
420  !                   = 11 Encastrement rigide
430  ! Liais(I,1)........Numéro du noeud origine de la barre
440  ! Liais(I,2)........Numéro du noeud extrémité la barre
450  ! Liais(I,3)........Numéro des caractéristiques géométriques :
460  !                   Section réduite et Inertie
470  ! Liais(I,4)........Numéro des caractéristiques physiques :
480  !                   Module de cisaillement G et module d'YOUNG E
490  ! Liais(I,5)........Code articulation aux extrémités des barres
500  !                   = 0000 Aucune articulation
510  !                   = 1000 Articulation de cisaillement à l'origine
520  !                   = 0100 Rotule à l'origine
530  !                   = 0010 Articulation de cisaillement à l'extrémité
540  !                   = 0001 Rotule à l'extrémité
550  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem;Nmodul,Nsect
560  COM Titre$[80],Charge$(5)[80]
570  COM X(100),E(5,2),Sect(15,2)
580  COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
590  !
600  ! 2°/ VARIABLES AUXILIAIRES EN COMMUN
610  !
620  ! Ndlb..............Nombre de degrés de liberté fixés (appuis)
630  ! Nn................Noeuds*Ndl : Dimension du système linéaire
640  ! Ntot..............Nombre de coefficients de la matrice A
650  ! Iappui(I) ........Numéros des degrés de liberté fixés
660  ! Maxa(I)...........Adresses des termes diagonaux de la matrice
```

```
670   ! A(I)..............Tableau des coefficients de la matrice et des
680   !                   seconds membres
690   ! R(I,24)...........Coefficients de la matrice de rigidité de la barre I
700   !                   de 1 à 4; de 5 à 24, pour chaque cas de charge, les
710   !                   efforts aux extrémités des barres.
720   COM Ndlb,Nn,Ntot
730   COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
740   COM A(5150),R(200,24)
750   !
760   ! Initialisation
770   !
780   MAT Maxa=(0)    !
790   MAT A=(0)       !
800   MAT Isup=(0)    !  CAR VARIABLES EN COMMUN
810   MAT Liais=(0)   !
820   MAT R=(0)       !
830   Nsect=1
840   Nmodul=1
850   Nnelem=2
860   !
870   ! Lecture des données générales et des coordonnées des noeuds
880   !
890   ! CALL Lect
900   !
910   ! Calcul des indices des degrés de liberté bloqués
920   !
930   CALL Indapp(Nnoeuds,Ndl,Ndlb,Isup(*),Iappui(*))
940   !
950   ! Reproduction des données relatives à la structure
960   !
970   CALL Imprim
980   !
990   FOR I=1 TO Nbarres
1000      !
1010      ! Formation de la matrice de rigidite de la liaison I
1020      !
1030      CALL Format(I)
1040      !
1050      ! Calcul de la hauteur des colonnes correspondantes
1060      !
1070      CALL Hcol(I,Ndl,Nnelem,Liais(*),Maxa(*))
1080      !
1090  NEXT I
1100  !
1110  ! Calcul des indices des termes diagonaux
1120  !
1130  CALL Indiag(Nn,Ntot,Maxa(*))
1140  !
1150  ! Assemblage de la matrice globale
1160  !
1170  CALL Assemb
1180  !
```

```
1190  ! Lecture des charges et création du ou des seconds membres
1200  !
1210  CALL Second
1220  !
1230  ! Modification de la matrice en fonction des appuis
1240  !
1250  CALL Modif(Nn,Ndlb,A(*),Maxa(*),Iappui(*))
1260  !
1270  ! Résolution du système linéaire
1280  !
1290  CALL Solve(Nn,Ntot,Nchar,A(*),Maxa(*))
1300  !
1310  ! Pour chaque cas de charge, impression des déplacements des noeuds,
1320  ! calcul et impression des efforts aux extrémités des barres et des
1330  ! réactions d'appuis.
1340  !
1350  Indice=Maxa(Nn+1)-Nn ! permet de récuperer les déplacements de chaque
1360  !                      cas de charge dans le tableau A.
1370  PRINT LIN(2)
1380  PRINT "RESULTATS"
1390  PRINT
1400  FOR I=1 TO Nchar
1410      !
1420      PRINT
1430      PRINT "CAS DE CHARGE N° ",I
1440      PRINT "================="
1450      PRINT Charge$(I)
1460      !
1470      Indice=Indice+Nn
1480      !
1490      ! Impression des déplacements
1500      !
1510      CALL Depl(Indice,Ndl,Nnoeuds,A(*))
1520      !
1530      ! Calcul et impression des efforts et des
1540      ! réactions d'appuis.
1550      !
1560      CALL Efforts(Indice,I)
1570      !
1580      PRINT LIN(2)
1590  NEXT I
1600  !
1610  DISP "FIN PROBLEME. FAIRE CONTINUE POUR UN AUTRE PROBLEME"
1620  PAUSE
1630  GOTO 780
1640  END
1650  !
```

4.3 - LECTURE DES DONNÉES

Les données définissant la structure sont particulièrement simples. Il convient de ne pas oublier d'initialiser la variable 'Ndl' à 2 (deux degrés de liberté par nœuds). Le fait de ne pas donner une des caractéristiques, physique ou géométrique, concernant la flexion ou la distorsion conduit à considérer la barre comme sans déformations vis-à-vis de cet effet. Nous n'avons pas envisagés le cas où un tronçon de barre se comporterait comme un solide parfaitement rigide. La définition des connexions est générée automatiquement. Le listing du sous-programme 'Lect' est reproduit ci-dessous :

Listing du sous-programme 'Lect' :

```
1660  ! ******************************************************************
1670  SUB Lect
1680  ! ******************************************************************
1690  !
1700  ! Appelé par Prog. Princ.
1710  !
1720  OPTION BASE 1
1730  !
1740  ! Lecture des données relatives à l'ossature
1750  !
1760  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
1770  COM Titre$[80],Charge$(5)[80]
1780  COM X(100),E(5,2),Sect(15,2)
1790  COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
1800  !
1810  COM Ndlb,Nn,Ntot
1820  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
1830  COM A(5150),R(200,24)
1840  !
1850  INPUT "Titre",Titre$
1860  Ndl=2
1870  INPUT "Nombre de barres",Nbarres
1880  Nnoeuds=Nbarres+1
1890  Nn=Nnoeuds*Ndl
1900  INPUT "Nombre de cas de charge",Nchar
1910  INPUT "Nombre de Sections  (1)",Nsect
1920  INPUT "Nombre de Modules E (1)",Nmodul
1930  !
1940  ! Lecture des abscisses des noeuds
1950  !
1960  FOR I=1 TO Nnoeuds
1970      DISP " X(";I;") ?"
1980      INPUT X(I)
```

```
1990      INPUT "Code Appui ? (0)=Noeud libre",Isup(I)
2000  NEXT I
2010  !
2020  ! Définition des liaisons
2030  !
2040  FOR I=1 TO Nbarres
2050      Liais(I,1)=I
2060      Liais(I,2)=I+1
2070      Liais(I,3)=1
2080      Liais(I,4)=1
2090      DISP "BARRE N° ";I
2100      DISP "N° Section (1)  N° Module (1) FAIRE CONTINUE Si 1 et 1"
2110      INPUT Liais(I,3),Liais(I,4)
2120      DISP "Code articulation ? (FAIRE CONTINUE SI PAS D'ARTICULATION)"
2130      INPUT Liais(I,5)
2140  NEXT I
2150  !
2160  ! Lecture des sections
2170  !
2180  FOR I=1 TO Nsect
2190      DISP "Section réduite, Inertie N° ";I
2200      INPUT Sect(I,1),Sect(I,2)
2210  NEXT I
2220  !
2230  ! Lecture des modules
2240  !
2250  FOR I=1 TO Nmodul
2260      DISP "Module G, module E N° ";I
2270      INPUT E(I,1),E(I,2)
2280  NEXT I
2290  !
2300  SUBEXIT
2310  SUBEND
```

4.4 - REPRODUCTION DES DONNÉES

Le listing concernant le sous-programme de reproduction des données, particularisé essentiellement par des labels adéquats, est reproduit ci-après :

Listing du sous-programme 'Imprim' :

```
2770  ! ******************************************************************
2780  SUB Imprim
2790  ! ******************************************************************
2800  !
2810  ! Appelé par Prog. Princ.
2820  !
2830  OPTION BASE 1
2840  !
2850  ! Reproduction des données générales de la structure
2860  !
2870  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
2880  COM Titre$[80],Charge$(5)[80]
2890  COM X(100),E(5,2),Sect(15,2)
2900  COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
2910  !
2920  COM Ndlb,Nn,Ntot
2930  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
2940  COM A(5150),R(200,24)
2950  !
2960  PRINT "TITRE : "&Titre$
2970  PRINT
2980  PRINT " Poutre continue, axe Y vertical"
2990  PRINT
3000  PRINT "Nombre de noeuds = ";Nnoeuds
3010  PRINT "Nombre de barres = ";Nbarres
3020  PRINT "Nombre de cas de charges = ";Nchar
3030  PRINT "Nombre de sections différentes = ";Nsect
3040  PRINT "Nombre de modules d'élasticité = ";Nmodul
3050  PRINT
3060  PRINT "ABSCISSES DES NOEUDS"
3070  PRINT
3080  PRINT " N°        X         Code appui"
3090  PRINT
3100  FOR I=1 TO Nnoeuds
3110      IF Ndl=2 THEN PRINT USING 3120;I,X(I),Isup(I)
3120      IMAGE DDD,3X,MDDD.DDD,11X,DDD
3130  NEXT I
3140  PRINT
3150  PRINT "DEFINITION DES LIAISONS"
3160  PRINT
3170  PRINT " N°   Origine  Extrémité  N° Sect. N° Module Code articulation"
3180  PRINT
3190  FOR I=1 TO Nbarres
3200      PRINT USING 3210;I,Liais(I,1),Liais(I,2),Liais(I,3),Liais(I,4),Liais(I
,5)
3210      IMAGE DDD,5X,DDD,6X,DDD,8X,DD,8X,DD,8X,DDDD
3220  NEXT I
3230  PRINT
```

```
3240  PRINT "CARACTERISTIQUES DES BARRES"
3250  PRINT
3260  FOR I=1 TO Nsect
3270      PRINT "Section réduite N° ";I;" = ";Sect(I,1)
3280      PRINT "Inertie N° ";I;" = ";Sect(I,2)
3290      PRINT
3300  NEXT I
3310  PRINT
3320  PRINT "MODULES D'ELASTICITE G et E"
3330  PRINT
3340  FOR I=1 TO Nmodul
3350      PRINT "Module G N° ";I;" = ";E(I,1)
3360      PRINT "Module E N° ";I;" = ";E(I,2)
3370      PRINT
3380  NEXT I
3390  SUBEXIT
3400  SUBEND
```

4.5 - MATRICE DE RIGIDITÉ D'UN ÉLÉMENT DE POUTRE EN FLEXION

La relation entre les forces appliquées aux extrémités d'une poutre et les déplacements de celles-ci peut s'obtenir rapidement de la manière exposée ci-après.

Soit un tronçon de poutre dont l'extrémité gauche est i et l'extrémité droite j. Ti et Mi l'effort tranchant et le couple appliqués en i, Tj et Mj l'effort tranchant et le couple appliqués en j. Les déplacements des nœuds i et j sont respectivement Vi, θi, Vj, et θj. Ces grandeurs sont positives sur la figure 50.

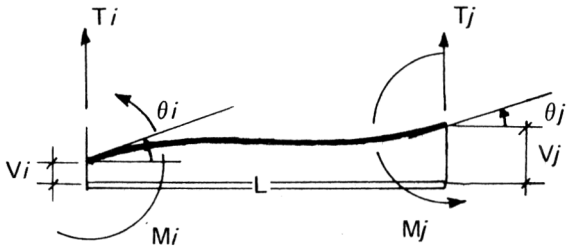


Fig. 50. - Définition des forces et des déplacements.

Les forces appliquées aux extrémités de la barre doivent satisfaire aux équations d'équilibre :

$$T_i + T_j = 0$$
$$M_i + M_j + T_j L = 0 \quad \text{ou} \quad M_i + M_j - T_i L = 0$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \\ L & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_i \\ M_i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} T_i \\ M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \\ -L & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_j \\ M_j \end{bmatrix}$$

Si on fixe $V_i = \theta_i = 0$, on trouve facilement :

$$\begin{bmatrix} V_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{G S_r} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} T_j \\ M_j \end{bmatrix}$$

Fig. 51.

En introduisant le paramètre sans dimensions : $\gamma = \dfrac{6\,EI}{L^2\,G\,S_r}$

et en inversant on obtient :

$$\begin{bmatrix} T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3(1+2\gamma)} \begin{bmatrix} 12 & -6L \\ -6L & 4L^2(1+\frac{\gamma}{2}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

et par conséquent :

$$\begin{bmatrix} T_i \\ M_i \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3(1+2\gamma)} \begin{bmatrix} -12 & 6L \\ -6L & 2L^2(1-\gamma) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

Si on fixe maintenant $V_j = \theta_j = 0$, on trouve de la même manière :

$$\begin{bmatrix} T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3(1+2\gamma)} \begin{bmatrix} -12 & -6L \\ 6L & 2L^2(1-\gamma) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_i \\ \theta_i \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} T_i \\ M_i \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3(1+2\gamma)} \begin{bmatrix} 12 & 6L \\ 6L & 4L^2(1+\frac{\gamma}{2}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$$

d'où la matrice de rigidité de l'élément de poutre en flexion :

$$\begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3(1+2\gamma)} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2(1+\frac{\gamma}{2}) & -6L & 2L^2(1-\gamma) \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2(1-\gamma) & -6L & 4L^2(1+\frac{\gamma}{2}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_i \\ \theta_i \\ V_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

Fig. 52. - Matrice de rigidité d'un élément de poutre en flexion.

Il convient maintenant de construire les matrices de rigidité dans le cas où, à l'une des extrémité, il y a une rotule (fig. 53).

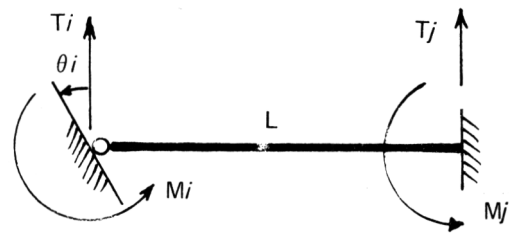


Fig. 53. - Cas d'une poutre avec rotule à gauche.

Dans ce cas un couple M*i* est sans effets. De même une rotation θi. Les seules grandeurs à considérer sont les forces T*i*, T*j*, M*j* et les déplacements correspondants V*i*, V*j* et θj. Les conditions d'équilibre sont alors :

$$Ti + Tj = 0$$
$$Ti\,L + Mj = 0$$

En fixant chaque fois deux des déplacements, on obtient facilement les expressions des forces en fonction du troisième. D'où la matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3(1+\frac{\gamma}{2})} \begin{bmatrix} 3 & & -3 & 3L \\ & & & \\ -3 & & 3 & -3L \\ 3L & & -3L & 3L^2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_i \\ \theta_i \\ V_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

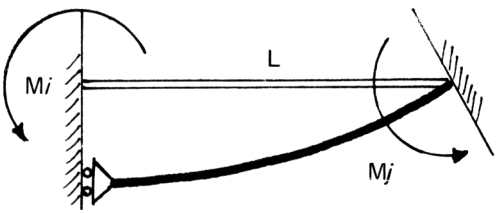
Fig. 54. - Matrice de rigidité avec rotule à gauche.

De même, dans le cas d'une rotule à droite, on trouve :

$$\begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)} \begin{bmatrix} 3 & 3L & -3 & \\ 3L & 3L^2 & -3L & \\ -3 & -3L & 3 & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

Fig. 55. - Matrice de rigidité avec rotule à droite.

Si maintenant on a une rotule vis-à-vis de l'effort tranchant à gauche (fig. 56), l'élément de poutre est en flexion pure :



$$M_i + M_j = 0$$

Fig. 56. - Élément en flexion pure.

On obtient dans ce cas :

$$\begin{bmatrix} T_i \\ M_i \\ T_j \\ M_j \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} & & & \\ & 1 & & -1 \\ & & & \\ & -1 & & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

Fig. 57. - Matrice de rigidité d'un élément de poutre en flexion pure.

Le sous-programme 'Format', dont l'organigramme est donné figure 58, détermine les différents coefficients de la matrice de rigidité et les range dans le tableau 'R'.

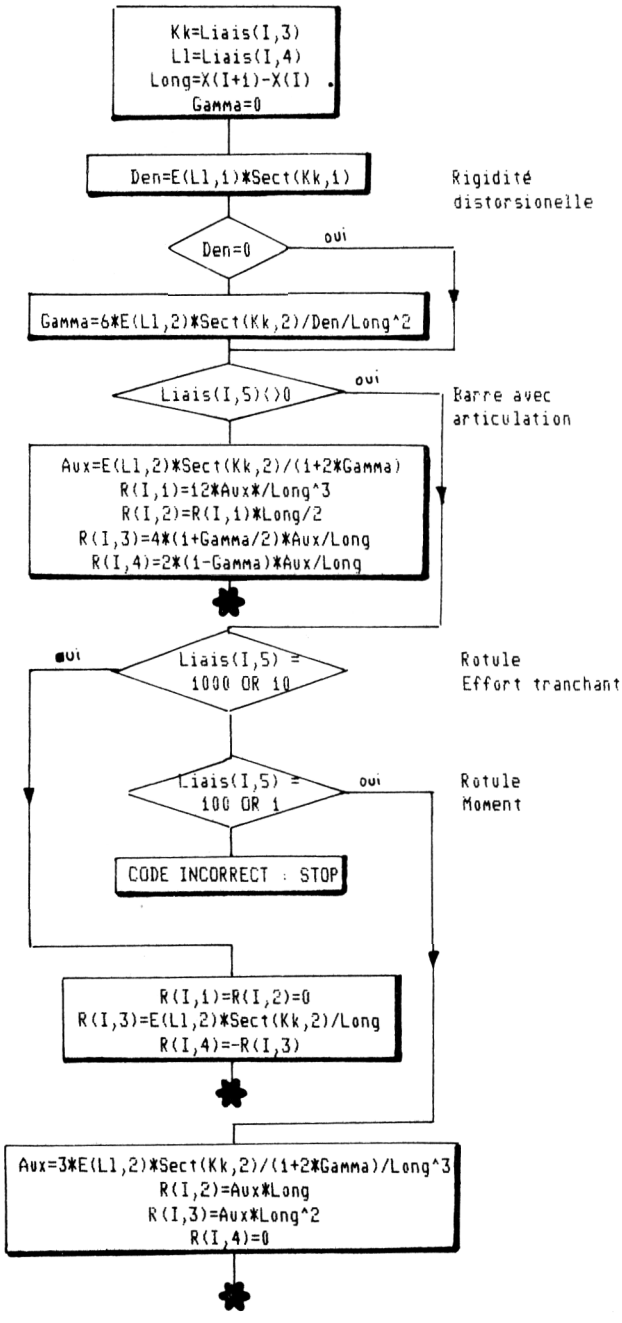


Fig. 58. - Organigramme du sous-programme 'Format'.

Listing du sous-programme 'Format' :

```
3410  ! ******************************************************************
3420  SUB Format(I)
3430  ! ******************************************************************
3440  !
3450  ! Appelé par Prog. Princ.
3460  !
3470  OPTION BASE 1
3480  !
3490  ! Calcul des coefficients de la matrice de rigidité I
3500  !
3510  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
3520  COM Titre$[80],Charge$(5)[80]
3530  COM X(100),E(5,2),Sect(15,2)
3540  COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
3550  !
3560  COM Ndlb,Nn,Ntot
3570  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
3580  COM A(5150),R(200,24)
3590  !
3600  Ii=Liais(I,1)
3610  Jj=Liais(I,2)
3620  Kk=Liais(I,3)
3630  Ll=Liais(I,4)
3640  !
3650  Long=X(I+1)-X(I)
3660  Gamma=0
3670  Den=E(Ll,1)*Sect(Kk,1)
3680  IF Den=0 THEN 3700
3690  Gamma=6*E(Ll,2)*Sect(Kk,2)/Den/Long^2
3700  IF Liais(I,5)<>0 THEN Artic ! Barre avec articulations
3710  Aux=E(Ll,2)*Sect(Kk,2)/(1+2*Gamma)
3720  R(I,1)=12*Aux/Long^3
3730  R(I,2)=R(I,1)*Long/2
3740  R(I,3)=4*(1+Gamma/2)*Aux/Long
3750  R(I,4)=2*(1-Gamma)*Aux/Long
3760  SUBEXIT
3770  !
3780 Artic: !
3790  IF (Liais(I,5)=1000) OR (Liais(I,5)=10) THEN R1
3800  IF (Liais(I,5)=100) OR (Liais(I,5)=1) THEN R2
3810  PRINT "CODE LIAISON INCORRECT"
3820  STOP
3830 R1: !
3840  R(I,1)=R(I,2)=0
3850  R(I,3)=E(Ll,2)*Sect(Kk,2)/Long
3860  R(I,4)=-R(I,3)
3870  SUBEXIT
3880 R2: !
```

```
3890  Aux=3*E(L1,2)*Sect(Kk,2)/(1+Gamma/2)/Long^3
3900  R(I,1)=Aux
3910  R(I,2)=Aux*Long
3920  R(I,3)=Aux*Long^2
3930  R(I,4)=0
3940  SUBEXIT
3950  SUBEND
```

4.6 - FORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ SOUS FORME STANDARD

Le sous-programme 'Matrig', dont l'organigramme est donné figure 59, reconstitue la matrice de rigidité à partir des valeurs précédemment calculées, sous sa forme prévue pour la formation de la matrice globale.

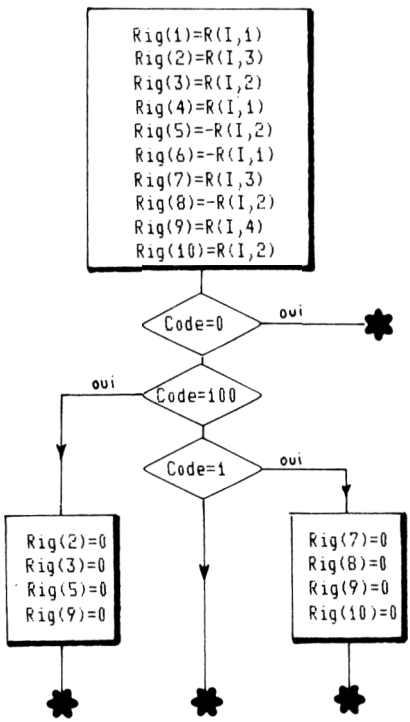


Fig. 59. - Organigramme du sous-programme 'Matrig'.

Listing du sous-programme 'Matrig' :

```
4800  ! ****************************************************************
4810  SUB Matrig(R(*),Rig(*),I,Code)
4820  ! ****************************************************************
4830  !
4840  ! Appelé par Assemb
4850  !
4860  OPTION BASE 1
4870  !
4880  ! Calcul de la matrice de rigidité de la barre sous la forme :
4890  !
4900  ! Rig(1)  Rig(3)  Rig(6) ....
4910  !         Rig(2)  Rig(5) ....
4920  !                 Rig(4) ....
4930  !
4940  Rig(1)=R(I,1)
4950  Rig(2)=R(I,3)
4960  Rig(3)=R(I,2)
4970  Rig(4)=R(I,1)
4980  Rig(5)=-R(I,2)
4990  Rig(6)=-R(I,1)
5000  Rig(7)=R(I,3)
5010  Rig(8)=-R(I,2)
5020  Rig(9)=R(I,4)
5030  Rig(10)=R(I,2)
5040  IF Code=0 THEN SUBEXIT
5050  IF Code=100 THEN Gauche
5060  IF Code=1 THEN Droite
5070  SUBEXIT ! Rotule au cisaillement
5080 Gauche: ! Rotule à l'origine
5090  Rig(2)=Rig(3)=Rig(5)=Rig(9)=0
5100  SUBEXIT
5110 Droite: ! Rotule à l'extrémité
5120  Rig(7)=Rig(8)=Rig(9)=Rig(10)=0
5130  SUBEXIT
5140  SUBEND
```

4.7 - CHARGES EN TRAVÉES

Ces charges sont soit concentrées, soit réparties. On décompose ce type de chargement en charges nodales, égales aux réactions de la poutre bi-encastrée, changées de signe, et d'un système auto-équilibré, ainsi que l'illustre la figure 60.

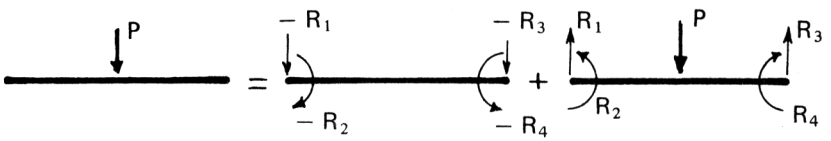


Fig. 60. - Décomposition des charges en travées.

Ce type de décomposition fut déjà rencontré pour les ossatures lors de la prise en compte de l'action du poids propre. Le système de charges auto-équilibré correspondant à un tronçon de poutre bi-encastrée donne des déplacements et des réactions d'appui nulles dans la structure. Il convient néanmoins de sauvegarder les charges nodales équivalentes pour le calcul des efforts aux extrémités des barres (ces valeurs, 4 par élément de poutre, sont conservées dans le tableau 'R').

Nous allons décrire la présentation utilisée pour le calcul des réactions d'appuis d'une poutre bi-encastrée, sous l'action de forces ou de couples concentrés puis répartis.

Soient R1 et R2 la réaction verticale et le moment d'encastrement à gauche, R3 et R4 la réaction verticale et le moment d'encastrement à droite. Soient F*y* et C*z* la force et le couple appliqués à une distance *'a'* de l'extrémité gauche. Un calcul classique donne, sous forme matricielle, les valeurs suivantes pour les réactions d'appui dues à la force F*y* et au couple C*z* (fig. 61).

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{L^3(1+2\gamma)} \begin{bmatrix} -2 & 3L & 2L^2\gamma & -L^3(1+2\gamma) & 0 & -6 & 6L & 2L^2\gamma \\ -L & L^2(2+\gamma) & -L^3(\gamma+1) & 0 & 0 & -3L & 2L^2(2+\gamma) & -L^3(\gamma+1) \\ 2 & -3L & -2L^2\gamma & 0 & 0 & 6 & -6L & -2L^2\gamma \\ -L & L^2(1-\gamma) & \gamma L^3 & 0 & 0 & 3L & -2L^2(1-\gamma) & -L^3\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^3F_y \\ a^2F_y \\ aF_y \\ F_y \\ a^3C_z \\ a^2C_z \\ aC_z \\ C_z \end{bmatrix}$$

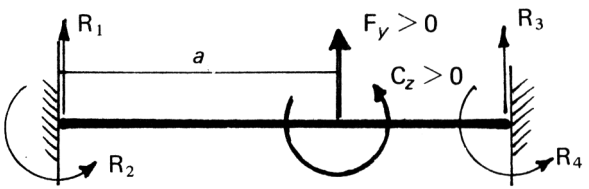


Fig. 61. - Réactions d'appui pour une force F*y* et un couple C*z*.

Le vecteur formé par les puissances de $'a'$ dépend de la position de la charge concentrée, alors que les coefficients de la matrice ne sont fonction que de la portée et des caractéristiques du tronçon de poutre. Il ne seront donc pas recalculés si le chargement concerne toujours le même tronçon.

Pour une charge variant linéairement (fig. 62), entre les abscisses $'a'$ et $'b'$ où les composantes de la densité de charge sont respectivement Pa, Ca, Pb, et Cb, l'expression de P entre a et b est donnée par :

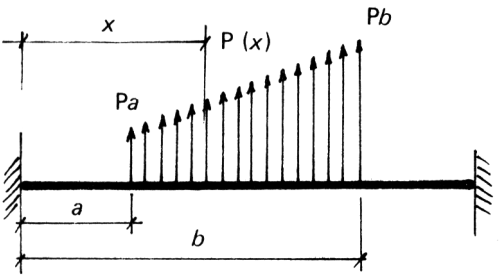


Fig. 62. - Densité de charge entre a et b.

On remplacera les puissances de $'a'$, a^n par $(b^{n+1} - a^{n+1})/(n+1)$ et on fera la somme de la partie constante et la partie linéairement variable.

Dans le programme, on a posé :

Coef1=(Pb—Pa)/(b—a)
Coef2=(Cb—Ca)/(b—a)
Coef3=(b*Pa—a*Pb)/(b—a)
Coef4=(b*Ca—a*Cb)/(b—a)

Dans le cas où on est en présence d'une articulation à l'extrémité de la poutre, il faut utiliser les matrices (fig. 63 et 64).

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}
= \frac{1}{L^3(2+\gamma)}
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & L^2(3+\gamma) & -L^3(2+\gamma) & 0 & -3 & 0 & L^2(3+\gamma) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -L^2(3+\gamma) & 0 & 0 & 3 & 0 & -L^2(3+\gamma) \\
-L & 0 & L^3 & 0 & 0 & -3L & 0 & L^3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a^3F_y \\ a^2F_y \\ aF_y \\ F_y \\ a^3C_z \\ a^2C_z \\ aC_z \\ C_z \end{bmatrix}
$$

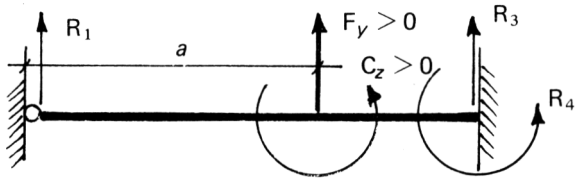


Fig. 63. - Rotule à gauche.

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}
= \frac{1}{L^3(2+\gamma)}
\begin{bmatrix}
-1 & 3L & L^2\gamma & -L^3(2+\gamma) & 0 & -3 & 6L & L^2\gamma \\
-L & 3L^2 & -2L^3 & 0 & 0 & -3L & 6L^2 & -2L^3 \\
1 & -3L & -L^2\gamma & 0 & 0 & 3 & -6L & -L^2\gamma \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a^3F_y \\ a^2F_y \\ aF_y \\ F_y \\ a^3C_z \\ a^2C_z \\ aC_z \\ C_z \end{bmatrix}
$$

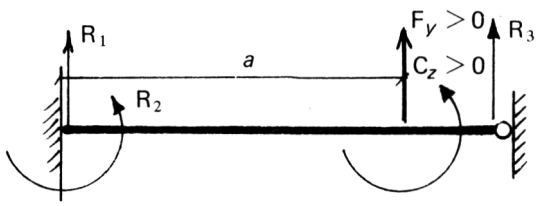


Fig. 64. - Rotule à droite.

Pour un élément avec rotule, vis-à-vis de l'effort tranchant on utilise les matrices figures 65 et 66.

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2L} & -1 & \frac{L}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & -1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2L} & 0 & \frac{L}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a^3F_y \\ a^2F_y \\ aF_y \\ F_y \\ a^3C_z \\ a^2C_z \\ aC_z \\ C_z \end{bmatrix}
$$

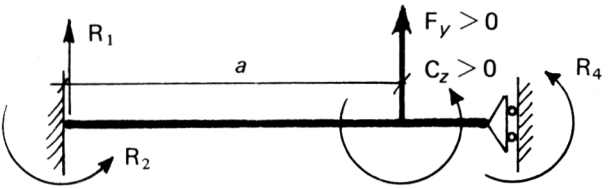


Fig. 65. - Effort tranchant nul à gauche.

$$
\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{2L} & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{1}{2L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a^3F_y \\ a^2F_y \\ aF_y \\ F_y \\ a^3C_z \\ a^2C_z \\ aC_z \\ C_z \end{bmatrix}
$$

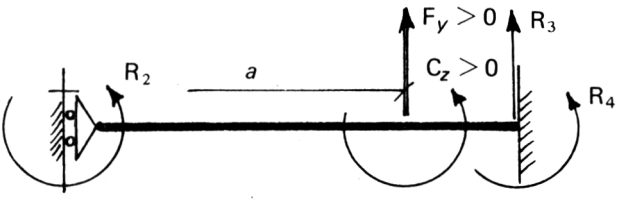


Fig. 66. - Effort tranchant nul à droite.

4.8 - DÉFINITION DES CHARGEMENTS

Quatre types de chargement ont été prévus :

– Les charges directement appliquées aux nœuds. C'est évidement le cas le plus simple et les valeurs algébriques de ces charges sont directement cumulées dans le second membre.

– Les charges appliquées sur les travées. Celles-ci peuvent être concentrées ou réparties, ce qui correspond aux valeurs 'Index'=2 et 'Index'=3.

– Les déplacements d'appuis. La séquence correspondante est identique à celle reproduite pour les ossatures, et l'organigramme n'en sera pas donné.

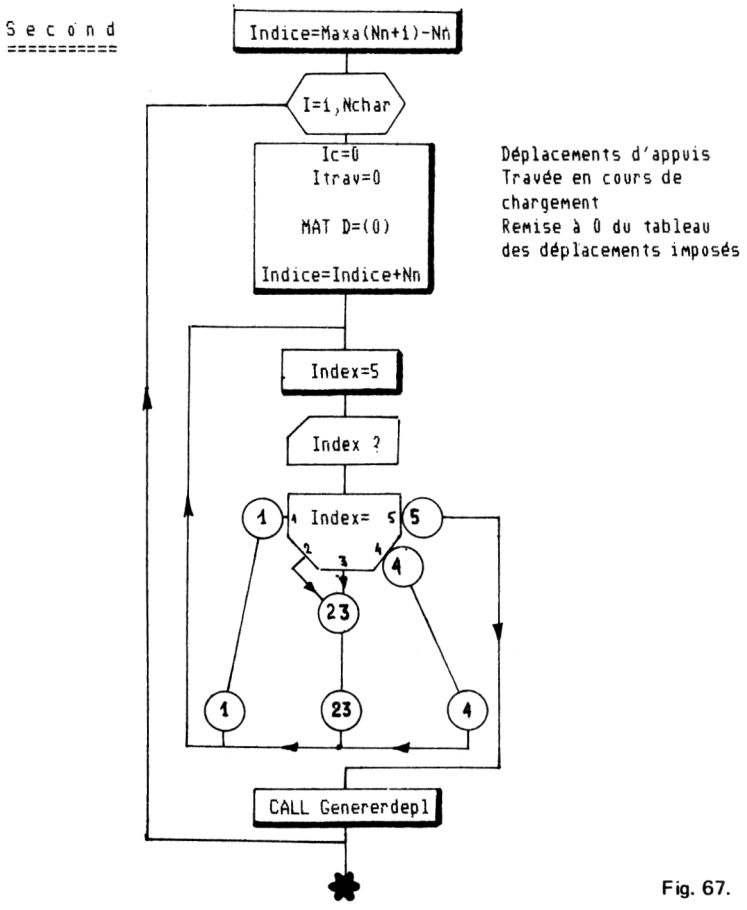
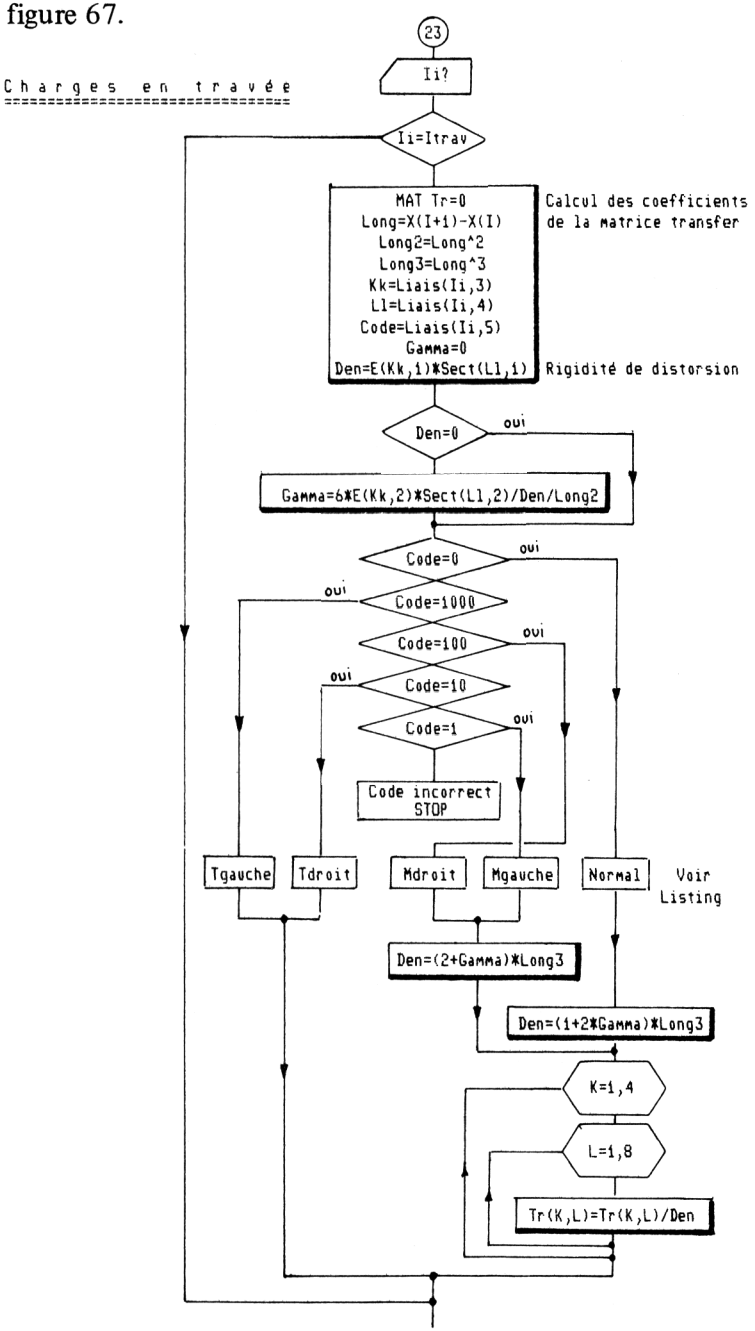
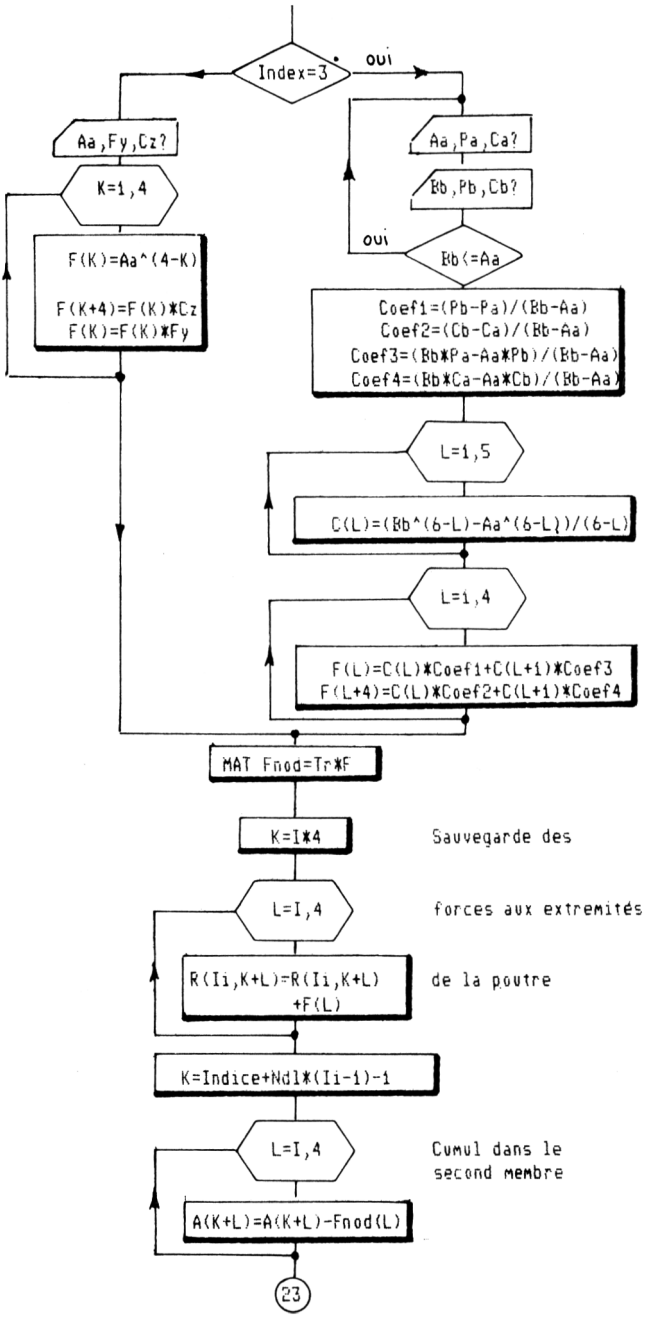


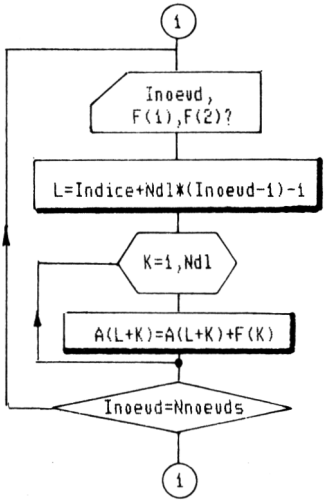
Fig. 67.

L'organigramme général du sous-programme 'Second' est donné figure 67.




Index=3
oui
Aa,Fy,Cz?
K=1,4
F(K)=Aa^(4-K)
F(K+4)=F(K)*Cz
F(K)=F(K)*Fy
Aa,Pa,Ca?
Bb,Pb,Cb?
oui
Bb<=Aa
Coef1=(Pb-Pa)/(Bb-Aa)
Coef2=(Cb-Ca)/(Bb-Aa)
Coef3=(Bb*Pa-Aa*Pb)/(Bb-Aa)
Coef4=(Bb*Ca-Aa*Cb)/(Bb-Aa)
L=1,5
C(L)=(Bb^(6-L)-Aa^(6-L))/(6-L)
L=1,4
F(L)=C(L)*Coef1+C(L+1)*Coef3
F(L+4)=C(L)*Coef2+C(L+1)*Coef4
MAT Fnod=Tr*F
K=I*4
Sauvegarde des
L=I,4
forces aux extremités
R(Ii,K+L)=R(Ii,K+L)
+F(L)
de la poutre
K=Indice+Ndl*(Ii-1)-1
L=I,4
Cumul dans le
second membre
A(K+L)=A(K+L)-Fnod(L)
23

Charges nodales




```
5650  ! ****************************************************************
5660  SUB Second
5670  ! ****************************************************************
5680  !
5690  ! Appelé par Prog. Princ.
5700  ! Appelle :  Genererdepl
5710  !
5720  OPTION BASE 1
5730  !
5740  ! Introduction du chargement, reproduction des charges
5750  ! et constitution du (ou des) seconds membres du système
5760  !
5770  COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
5780  COM Titre$[80],Charges$(5)[80]
5790  COM X(100),E(5,2),Sect(15,2)
5800  COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
5810  !
5820  COM Ndlb,Nn,Ntot
5830  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
5840  COM A(5150),R(200,24)
5850  !
5860  DIM F(8),Coef(3),D(300),Tr(4,8),Fnod(4)
5870  !
5880  Indice=Maxa(Nn+1)-Nn
5890  FOR I=1 TO Nchar
5900      Ic=0              ! Paramètre indiquant les déplacements d'appuis
5910      Itrav=0
```

```
5920      MAT D=(0)
5930      Indice=Indice+Nn ! Indice du 1er Coef. du vecteur second membre
5940      PRINT LIN(3)
5950      PRINT "CAS DE CHARGE N° ";I
5960      PRINT "-----------------"
5970      PRINT
5980      INPUT " Titre du cas de charge ?",Charges$(I)
5990      PRINT Charges$(I)
6000      PRINT
6010      Index=5
6020      DISP " NATURE DU CHARGEMENT ?"
6030      DISP " 1 : Charges concentrée aux noeuds"
6040      DISP " 2 : Charges concentrées en travées"
6050      DISP " 3 : Charges linéaires en travées"
6060      DISP " 4 : Déplacement d'appui"
6070      INPUT " 5 : FIN",Index
6080      ON Index GOTO C1,C2,C2,C4,Nexti
6090      !
6100 C1:  ! Charges concentrées aux noeuds
6110      !
6120      PRINT "CHARGES AUX NOEUDS"
6130      PRINT " N° noeud   Fy     Cz"
6140      DISP "La description du chargement est achevée par la donnée"
6150      DISP "de la charge sur le dernier noeud"
6160      INPUT " N° noeud, Fy, Cz",Inoeud,F(1),F(2)
6170      PRINT USING 6180;Inoeud,F(1),F(2)
6180      IMAGE X,DDD,2X,MDDD.DDD,2X,MDDD.DDD
6190      L=Indice+Ndl*(Inoeud-1)-1
6200      FOR K=1 TO Ndl
6210          A(L+K)=A(L+K)+F(K)
6220      NEXT K
6230      IF Inoeud=Nnoeuds THEN 6010
6240      GOTO 6140 ! Introduction de la charge sur le noeud suivant
6250      !
6260 C2:  ! Charges en travée
6270      !
6280      INPUT " NUMERO DE LA TRAVEE ?",Ii
6290      PRINT LIN(1)
6300      PRINT " TRAVEE N° ";Ii
6310      IF Ii=Itrav THEN Suite ! Ne pas recalculer les coef de Tr
6320      Itrav=Ii
6330      !
6340      ! Calcul des coefficients de la matrice transfer
6350      !
6360      MAT Tr=(0)
6370      !
6380      Long=X(Ii+1)-X(Ii)
6390      Long2=Long^2
6400      Long3=Long2*Long
6410      Kk=Liais(Ii,3)
6420      Ll=Liais(Ii,4)
6430      Code=Liais(Ii,5)
```

```
6440      Gamma=0
6450      Den=E(Kk,1)*Sect(L1,1)
6460      IF Den=0 THEN 6480
6470      Gamma=6*E(Kk,2)*Sect(L1,2)/Den/Long^2
6480      IF Code=0 THEN Normal
6490      IF Code=1000 THEN Tgauche
6500      IF Code=100 THEN Mgauche
6510      IF Code=10 THEN Tdroit
6520      IF Code=1 THEN Mdroit
6530      DISP "CODE INCORRECT"
6540      STOP
6550 Normal:!
6560      Den=(1+2*Gamma)*Long3
6570      Tr(1,1)=-2
6580      Tr(1,2)=3*Long
6590      Tr(1,3)=2*Gamma*Long2
6600      Tr(1,4)=-(1+2*Gamma)*Long3
6610      Tr(1,6)=-6
6620      Tr(1,7)=6*Long
6630      Tr(1,8)=2*Gamma*Long2
6640      Tr(2,1)=-Long
6650      Tr(2,2)=(2+Gamma)*Long2
6660      Tr(2,3)=-(1+Gamma)*Long3
6670      Tr(2,6)=-3*Long
6680      Tr(2,7)=2*Tr(2,2)
6690      Tr(2,8)=Tr(2,3)
6700      Tr(3,1)=2
6710      Tr(3,2)=-Tr(1,2)
6720      Tr(3,3)=-Tr(1,3)
6730      Tr(3,6)=6
6740      Tr(3,7)=-Tr(1,7)
6750      Tr(3,8)=-Tr(1,8)
6760      Tr(4,1)=-Long
6770      Tr(4,2)=(1-Gamma)*Long2
6780      Tr(4,3)=Gamma*Long3
6790      Tr(4,6)=Tr(2,6)
6800      Tr(4,7)=2*Tr(4,2)
6810      Tr(4,8)=Tr(4,3)
6820      GOTO Divise
6830 Tgauche:!
6840      Tr(2,2)=.5/Long
6850      Tr(2,3)=-1
6860      Tr(2,4)=Long/2
6870      Tr(2,7)=1/Long
6880      Tr(2,8)=Tr(3,4)-1
6890      Tr(4,2)=-Tr(2,2)
6900      Tr(4,4)=Tr(2,4)
6910      Tr(4,7)=-Tr(2,7)
6920      GOTO Suite
6930 Mgauche:!
6940      Den=(2+Gamma)*Long3
6950      Tr(1,1)=-1
```

```
6960      Tr(1,3)=(3+Gamma)*Long2
6970      Tr(1,4)=-(2+Gamma)*Long3
6980      Tr(1,6)=-3
6990      Tr(1,8)=Tr(1,3)
7000      Tr(3,1)=1
7010      Tr(3,3)=-Tr(1,3)
7020      Tr(1,6)=3
7030      Tr(3,8)=-Tr(1,8)
7040      Tr(4,1)=-Long
7050      Tr(4,3)=Long3
7060      Tr(4,6)=-3*Long
7070      Tr(4,8)=Long3
7080      GOTO Divise
7090 Tdroit:!
7100      Tr(1,4)=Tr(2,3)=Tr(2,8)=-1
7110      Tr(2,2)=.5/Long
7120      Tr(2,7)=1/Long
7130      Tr(4,2)=-Tr(2,2)
7140      Tr(4,7)=-Tr(2,7)
7150      GOTO Suite
7160 Mdroit:!
7170      Den=(2+Gamma)*Long3
7180      Tr(1,1)=-1
7190      Tr(1,2)=3*Long
7200      Tr(1,3)=Gamma*Long2
7210      Tr(1,4)=-(2+Gamma)*Long3
7220      Tr(1,6)=-3
7230      Tr(1,7)=6*Long
7240      Tr(1,8)=Tr(1,3)
7250      Tr(2,1)=-Long
7260      Tr(2,2)=3*Long2
7270      Tr(2,3)=-2*Long3
7280      Tr(2,6)=-Tr(1,2)
7290      Tr(2,7)=6*Long2
7300      Tr(2,8)=Tr(2,3)
7310      Tr(3,1)=1
7320      Tr(3,2)=-Tr(1,2)
7330      Tr(3,3)=-Tr(1,3)
7340      Tr(3,6)=3
7350      Tr(3,7)=-Tr(1,7)
7360      Tr(3,8)=Tr(3,3)
7370 Divise:!
7380      FOR K=1 TO 4
7390          FOR L=1 TO 8
7400              Tr(K,L)=Tr(K,L)/Den
7410          NEXT L
7420      NEXT K
7430 Suite:!
7440      IF Index=3 THEN Repartie
7450      INPUT " Abscisse de la charge, Fy, Cz ?",Aa,Fy,Cz
7460      PRINT " Abscisse = ";Aa,"  Fy = ";Fy,"  Cz = ";Cz
7470      FOR K=1 TO 4
```

```
7480          F(K)=Aa^(4-K)
7490          F(K+4)=F(K)*Cz
7500          F(K)=F(K)*Fy
7510      NEXT K
7520      GOTO Produit
7530 Repartie:!
7540      DISP " Abscisse origine, Densité de forces, Densité de couples ?"
7550      INPUT Aa,Pa,Ca
7560      PRINT "Abscisse origine.............= ";Aa
7570      PRINT "Densité de forces  origine...= ";Pa
7580      PRINT "Densité de couples origine...= ";Ca
7590      DISP " Abscisse extrémité, Densité de forces, Densité de couples ?"
7600      INPUT Bb,Pb,Cb
7610      PRINT "Abscisse extrémité...........= ";Bb
7620      PRINT "Densité de forces extrémité..= ";Pb
7630      PRINT "Densité de couples extrémité = ";Cb
7640      PRINT
7650      IF Bb>Aa THEN 7680
7660      PRINT "ERREUR"
7670      GOTO Repartie
7680      Coef1=(Pb-Pa)/(Bb-Aa)
7690      Coef2=(Cb-Ca)/(Bb-Aa)
7700      Coef3=(Bb*Pa-Aa*Pb)/(Bb-Aa)
7710      Coef4=(Bb*Ca-Aa*Cb)/(Bb-Aa)
7720      FOR L=1 TO 5
7730          C(L)=(Bb^(6-L)-Aa^(6-L))/(6-L)
7740      NEXT L
7750      FOR L=1 TO 4
7760          F(L)=C(L)*Coef1+C(L+1)*Coef3
7770          F(L+4)=C(L)*Coef2+C(L+1)*Coef4
7780      NEXT L
7790 Produit:!
7800      MAT Fnod=Tr*F
7810      !
7820      ! Sauvegarde
7830      !
7840      K=I*4
7850      FOR L=1 TO 4
7860          R(Ii,K+L)=R(Ii,K+L)+Fnod(L)
7870      NEXT L
7880      !
7890      ! Cumul dans le second membre
7900      !
7910      K=Indice+Ndl*(Ii-1)-1
7920      FOR L=1 TO 4
7930          A(K+L)=A(K+L)-Fnod(L)
7940      NEXT L
7950      GOTO 6010
7960      !
7970 C4:  ! Déplacements d'appuis
7980      !
7990      PRINT "DEPLACEMENTS IMPOSES DES APPUIS"
```

```
8000      !
8010      INPUT " N° du Noeud ?",N
8020      IF Isup(N)=0 THEN Erreur
8030      Ic=Ic+1
8040      Nombre=Isup(N)
8050      CALL Decode(Nombre;Ndl,Coef(*))
8060      INPUT "DY, Teta ?",F(1),F(2)
8070      PRINT "Noeud N° ";N," Dy = ";F(1)," Teta = ";F(2)
8080      Rep$="Oui"
8090      In=(N-1)*Ndl
8100      !
8110      ! Seuls les déplacements imposés correspondants à des degrés de
8120      ! liberté bloqués sont pris en compte et placés dans le vecteur D
8130      !
8140      FOR Jj=1 TO Ndl
8150          IF Coef(Jj)=0 THEN 8170
8160          D(In+Jj)=F(Jj)
8170      NEXT Jj
8180      INPUT "Autre déplacement d'appui (Oui) ?",Rep$
8190      IF Rep$="Oui" THEN 8010
8200      GOTO 6010
8210 Erreur: DISP "Le noeud n'est pas un appui"
8220      GOTO 8010
8230 Nexti:!
8240  !
8250  ! Modification du second membre en fonction des déplacements d'appuis
8260  !
8270  CALL Genererdepl(Indice,Ic,Nn,Ndlb,D(*),A(*),Iappui(*),Maxa(*))
8280  !
8290  NEXT I
8300  SUBEXIT
8310  SUBEND
```

4.9 - IMPRESSION DES DÉPLACEMENTS

Cette séquence est simplement particularisée par des labels adéquats. Il convient de rappeler le point important suivant : si une barre est articulée à une de ses extrémités, le déplacement relatif au nœud concerné se rapporte à l'extrémité de la barre adjacente. Comme il revient au même de considérer l'articulation pour la barre de droite ou de gauche (mais surtout pas pour les deux!), on peut trouver deux déplacements différents pour le nœud. Ce fait ne doit pas étonner.

Le listing du sous-programme 'Depl' :

```
10260 ! ************************************************************
10270 SUB Depl(Indice,Ndl,Nnoeuds,A(*))
10280 ! ************************************************************
10290 !
10300 ! Appelé par Prog. Princ.
10310 !
10320 OPTION BASE 1
10330 !
10340 ! Impression des déplacements
10350 !
10360 PRINT LIN(1)
10370 PRINT "D E P L A C E M E N T S   D E S   N OE U D S"
10380 PRINT
10390 PRINT " N° Noeud        Dy            Teta"
10400 PRINT
10410 FOR I=1 TO Nnoeuds
10420     Ii=Indice+(I-1)*Ndl
10430     PRINT USING 10440;I,A(Ii),A(Ii+1)
10440     IMAGE 3X,DDD,5X,MD.DDDDDDE,2X,MD.DDDDDDE
10450 NEXT I
10460 SUBEXIT
10470 SUBEND
```

4.10 - EFFORTS ET RÉACTIONS D'APPUI

Les efforts aux extrémités des barres sont calculés à partir des matrices de rigidité (le sous-programme 'Matrig' est appelé de nouveau) et des déplacements. Il convient de rajouter les réactions d'appui pour le tronçon supposé parfaitement encastré qui ont été sauvegardées dans le tableau 'R'. La séquence de calcul des réactions d'appui de la poutre continue est identique à celle décrite pour les ossatures.

L'organigramme du sous-programme 'Efforts' est donné figure 68.

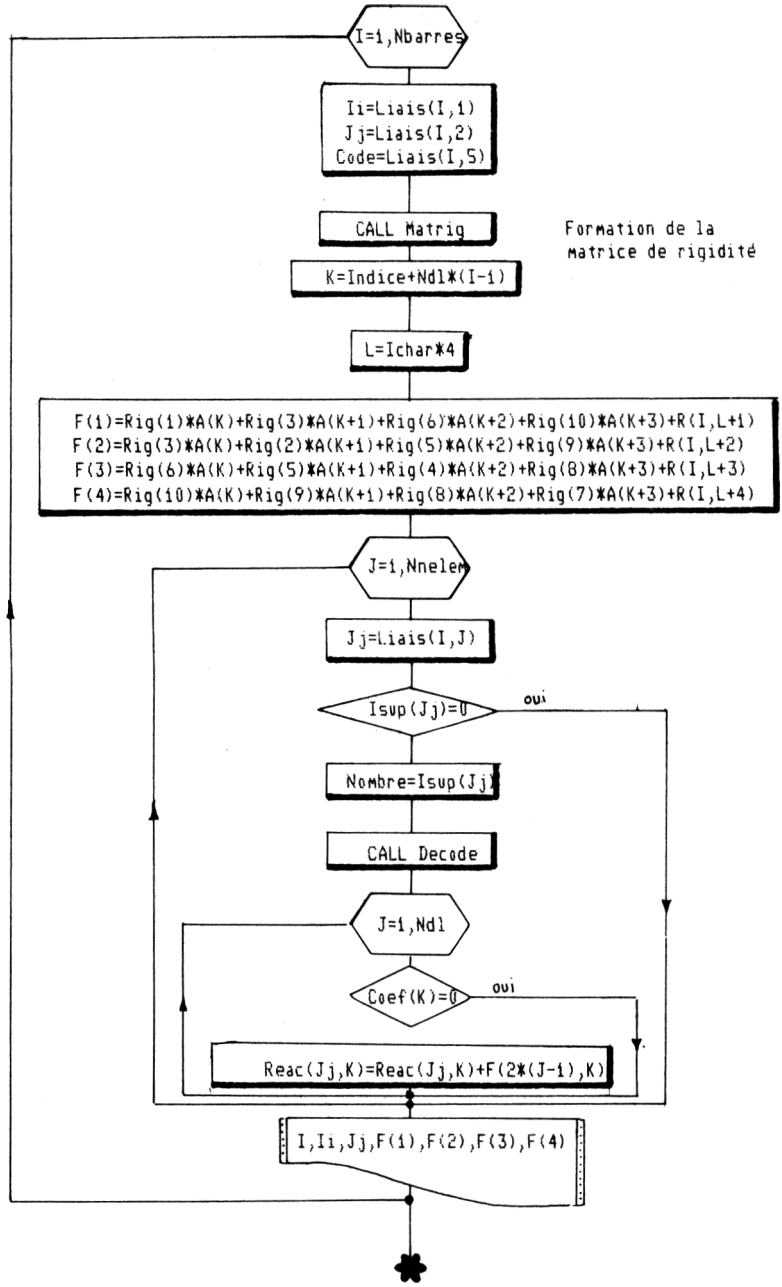


Fig. 68. - Organigramme du sous-programme 'Efforts'.

Listing du sous-programme 'Efforts' :

```
10480 ! ************************************************************
10490 SUB Efforts(Indice,Ichar)
10500 ! ************************************************************
10510 !
10520 ! Appelé par Prog. Princ.
10530 !
10540 OPTION BASE 1
10550 !
10560 ! Calcul et impression des efforts dans les barres
10570 !
10580 COM Nnoeuds,Nbarres,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nsect
10590 COM Titre$[80],Charges$(5)[80]
10600 COM X(100),E(5,2),Sect(15,2)
10610 COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
10620 !
10630 COM Ndlb,Nn,Ntot
10640 COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
10650 COM A(5150),R(200,24)
10660 !
10670 DIM Rig(21),Coef(2),F(4),Reac(50,2)
10680 PRINT LIN(1)
10690 PRINT " E F F O R T S   D A N S   L E S   B A R R E S"
10700 PRINT
10710 PRINT " N° Barre   N° Orig.   N° Extr.   T Orig.      M Orig.      T Extr.
      M Extr."
10720 PRINT
10730 FOR I=1 TO Nbarres
10740     Ii=Liais(I,1)
10750     Jj=Liais(I,2)
10760     Code=Liais(I,5)
10770     !
10780     CALL Matrig(R(*),Rig(*),I,Code)
10790     !
10800     K=Indice+Ndl*(I-1)
10810     L=Ichar*4
10820     F(1)=Rig(1)*A(K)+Rig(3)*A(K+1)+Rig(6)*A(K+2)+Rig(10)*A(K+3)+R(I,L+1)
10830     F(2)=Rig(3)*A(K)+Rig(2)*A(K+1)+Rig(5)*A(K+2)+Rig(9)*A(K+3)+R(I,L+2)
10840     F(3)=Rig(6)*A(K)+Rig(5)*A(K+1)+Rig(4)*A(K+2)+Rig(8)*A(K+3)+R(I,L+3)
10850     F(4)=Rig(10)*A(K)+Rig(9)*A(K+1)+Rig(8)*A(K+2)+Rig(7)*A(K+3)+R(I,L+4)
10860     !
10870     ! Calcul des Réactions d'appuis.
10880     !
10890     FOR J=1 TO Nnelem
10900         Jj=Liais(I,J)
10910         IF Isup(Jj)=0 THEN 10980
10920         Nombre=Isup(Jj)
10930         CALL Decode(Nombre,Ndl,Coef(*))
10940         FOR K=1 TO Ndl
10950             IF Coef(K)=0 THEN 10970
```

```
10960            Reac(Jj,K)=Reac(Jj,K)+F(2*(J-1)+K)
10970        NEXT K
10980    NEXT J
10990    !
11000    ! Impression des efforts
11010    !
11020    PRINT USING 11030;I,Ii,Jj,F(1),F(2),F(3),F(4)
11030    IMAGE 4X,DDD,8X,DDD,8X,DDD,4( X,MDDDDDD.DDD,X)
11040 NEXT I
11050 !
11060 ! Impression des Réactions d'appuis
11070 !
11080 PRINT LIN(1)
11090 PRINT "R E A C T I O N S   D ' A P P U I S"
11100 PRINT
11110 PRINT " N° Noeud        Ry         Mz"
11120 PRINT
11130 FOR I=1 TO Nnoeuds
11140    IF Isup(I)=0 THEN 11170
11150    PRINT USING 11160;I,Reac(I,1),Reac(I,2)
11160    IMAGE 3X,DDD,2(2X,MD.DDDDDDE)
11170 NEXT I
11180 SUBEXIT
11190 SUBEND
```

4.11 - EXEMPLE DE CALCUL DE POUTRE CONTINUE

La poutre est définie par la figure 69.

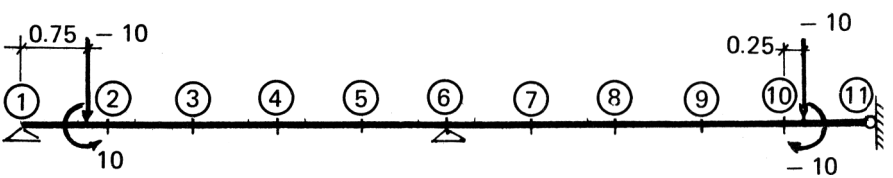


Fig. 69. - Exemple poutre continue

TITRE : Essai poutre continue 3 Appuis

Poutre continue, axe Y vertical

Nombre de noeuds = 11
Nombre de barres = 10
Nombre de cas de charges = 1
Nombre de sections différentes = 1
Nombre de modules d'élasticité = 1

ABSCISSES DES NOEUDS

N°	X	Code appui
1	0.000	10
2	1.000	0
3	2.000	0
4	3.000	0
5	4.000	0
6	5.000	10
7	6.000	0
8	7.000	0
9	8.000	0
10	9.000	0
11	10.000	11

DEFINITION DES LIAISONS

N°	Origine	Extrémité	N° Sect.	N° Module	Code articulation
1	1	2	1	1	0
2	2	3	1	1	0
3	3	4	1	1	0
4	4	5	1	1	0
5	5	6	1	1	0
6	6	7	1	1	0
7	7	8	1	1	0
8	8	9	1	1	0
9	9	10	1	1	0
10	10	11	1	1	1

CARACTERISTIQUES DES BARRES

Section réduite N° 1 = .0005
Inertie N° 1 = .0005

MODULES D'ELASTICITE G et E

Module G N° 1 = 800000
Module E N° 1 = 2000000

CAS DE CHARGE N° 1

Test symétrie

TRAVEE N° 1
Abscisse = .75 Fy = -10 Cz = 10

TRAVEE N° 10
Abscisse = .25 Fy = -10 Cz = -10

RESULTATS

CAS DE CHARGE N° 1
==========
Test symétrie

D E P L A C E M E N T S D E S N OE U D S

N° Noeud	Dy	Teta
1	0.000000E+00	-3.545673E-04
2	5.699038E-03	2.159615E-03
3	5.410817E-03	6.396635E-04
4	3.929327E-03	-2.269231E-04
5	1.907933E-03	-4.401442E-04
6	0.000000E+00	-8.000000E-15
7	1.907933E-03	4.401442E-04
8	3.929327E-03	2.269231E-04
9	5.410817E-03	-6.396635E-04
10	5.699038E-03	-2.159615E-03
11	0.000000E+00	0.000000E+00

E F F O R T S D A N S L E S B A R R E S

N° Barre	N° Orig.	N° Extr.	T Orig.	M Orig.	T Extr.	M Extr.
1	1	2	10.653	0.000	-.653	-1.847
2	2	3	.653	1.847	-.653	-1.193
3	3	4	.653	1.193	-.653	-.540
4	4	5	.653	.540	-.653	.113
5	5	6	.653	-.113	-.653	.767
6	6	7	-.653	-.767	.653	.113
7	7	8	-.653	-.113	.653	-.540
8	8	9	-.653	.540	.653	-1.193
9	9	10	-.653	1.193	.653	-1.847
10	10	11	-.653	1.847	10.653	0.000

R E A C T I O N S D ' A P P U I

N° Noeud	Ry	Mz
1	1.065337E+01	0.000000E+00
6	-1.306731E+00	0.000000E+00
11	1.065337E+01	0.000000E+00

5 ÉLASTICITÉ PLANE

5.1 - BASES THÉORIQUES

Le problème est résolu par la connaissance des deux composantes du déplacement d'un point, $u\ (x,\ y)$ et $v\ (x,\ y)$. On déduit alors les déformations par :

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Les déformations et les contraintes sont reliées par la loi de HOOKE :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

pour un état de contrainte plane ($\sigma_z = 0$, $\epsilon_z \langle\rangle 0$) et par

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

pour un état de déformation plane ($\sigma_z \langle\rangle 0$ et $\epsilon_z = 0$).

Cette relation peut être représentée matriciellement par :

$$\sigma = [D]\,\epsilon$$

5.2 - APPROXIMATION DES FONCTIONS DE DÉPLACEMENT

La connaissance exacte des composantes du déplacement en tout point étant impossible, on cherchera à déterminer leurs valeurs 'en un certain nombre de points'. A cette fin, on découpe le domaine étudié en éléments triangulaires, et on cherche à interpoler les déplacements à l'intérieur du triangle à partir des déplacements des sommets. Le plus simple est de supposer que les fonctions déplacements $u(x,y)$ et $v(x,y)$ sont des fonctions linéaires à l'intérieur de chaque triangle élémentaire :

$$u(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$$
$$v(x, y) = \alpha_3 + \alpha_4 x + \alpha_5 y$$

$u(x, y)$ et $v(x, y)$ prennent les valeurs U_i, V_i, U_j, V_j, U_k et V_k aux sommets d'un triangle i, j, k. On peut ainsi déterminer les constantes

$$\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5$$

en fonction des coordonnées des sommets i, j, k du triangle.

On obtient pour u et v les expressions suivantes :

$$u(x, y) = \frac{1}{2\Delta}[(a_i + b_i x + c_i y)U_i + (a_j + b_j x + c_j y)U_j + (a_k + b_k x + c_k y)U_k]$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\Delta}[(a_i + b_i x + c_i y)V_i + (a_j + b_j x + c_j y)V_j + (a_k + b_k x + c_k y)V_k]$$

$a_i = x_j y_k - x_k y_j$ $\quad a_j = x_k y_i - x_i y_k$ $\quad a_k = x_i y_j - x_j y_i$

$b_i = y_j - y_k$ $\quad b_j = y_k - y_i$ $\quad b_k = y_i - y_j$

$c_i = x_k - x_j$ $\quad c_j = x_i - x_k$ $\quad c_k = x_j - x_i$

Δ = Surface du triangle ijk.

Ces notations seront également utilisées lors de l'étude du problème de torsion.

5.3 - MATRICE DE RIGIDITÉ D'UN ÉLÉMENT TRIANGULAIRE

Par application des opérateurs différentiels reliant les déformations aux déplacements, on obtient la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_k \\ V_k \end{bmatrix}$$

que l'on écrit matriciellement sous la forme

$$\epsilon = [B]\,\delta$$

Cherchons la relation entre les forces appliquées aux nœuds *i, j, k* d'un triangle élémentaire et les déplacements de ses sommets.

On considère un déplacement virtuel δ^* des sommets *i, j, k*. Il en résulte des déformations virtuelles

$$\epsilon^* = [B]\,\delta^*$$

Le théorème des travaux virtuels permet d'écrire :

$$^t\delta^* \, F = \int_v {}^t\epsilon^* \, \sigma \, dv$$

– L'intégration porte sur le volume de l'élément

– $^t\delta$ est un vecteur ligne : $\{ U_i \;\; V_i \;\; U_j \;\; V_j \;\; U_k \;\; V_k \}$

– F est un vecteur colonne dont les composantes sont :

$$^t \{ F_{xi} \;\; F_{yi} \;\; F_{xj} \;\; F_{yj} \;\; F_{xk} \;\; F_{yk} \}$$

En utilisant les relations précédentes, on obtient :

$$^t\delta^* \, F = \int_v {}^t\delta^* \, {}^tB \, D \, B \, \delta \, dv$$

et par conséquent

$$F = \left[\int_v {}^tB \, D \, B \, dv \right] \delta$$

Comme les coefficients des matrices sous le signe somme sont constants, l'intégration consiste à multiplier ce produit par le volume de l'élément. On pose

$$K = {}^tB \, D \, B \, (\Delta \, e)$$

matrice de rigidité de l'élément triangulaire dont les déformations sont approchées par des fonctions linéaires.

Sous forme explicite, les coefficients de la matrice de rigidité de l'élément triangulaire sont donnés, figure 70 :

$b_i^2+\frac{1-\nu}{2}c_i^2$	$\frac{1+\nu}{2}b_ic_i$	$b_ib_j+\frac{1-\nu}{2}c_ic_j$	$\nu b_ic_j+\frac{1-\nu}{2}c_ib_j$	$b_ib_k+\frac{1-\nu}{2}c_ic_k$	$\nu b_ic_k+\frac{1-\nu}{2}c_ib_k$
$\frac{1+\nu}{2}b_ic_i$	$c_i^2+\frac{1-\nu}{2}b_i^2$	$\nu b_jc_i+\frac{1-\nu}{2}c_jb_i$	$c_ic_j+\frac{1-\nu}{2}b_ib_j$	$\nu c_ib_k+\frac{1-\nu}{2}b_ic_k$	$c_ic_k+\frac{1-\nu}{2}b_ib_k$
$b_ib_j+\frac{1-\nu}{2}c_ic_j$	$\nu b_jc_i+\frac{1-\nu}{2}c_jb_i$	$b_j^2+\frac{1-\nu}{2}c_j^2$	$\frac{1+\nu}{2}b_jc_j$	$b_jb_k+\frac{1-\nu}{2}c_jc_k$	$\nu b_jc_k+\frac{1-\nu}{2}c_jb_k$
$\nu b_ic_j+\frac{1-\nu}{2}c_ib_j$	$c_ic_j+\frac{1-\nu}{2}b_ib_j$	$\frac{1+\nu}{2}b_jc_j$	$c_j^2+\frac{1-\nu}{2}b_j^2$	$\nu c_jb_k+\frac{1-\nu}{2}b_jc_k$	$c_jc_k+\frac{1-\nu}{2}b_jb_k$
$b_ib_k+\frac{1-\nu}{2}c_ic_k$	$\nu c_ib_k+\frac{1-\nu}{2}b_ic_k$	$b_jb_k+\frac{1-\nu}{2}c_jc_k$	$\nu c_jb_k+\frac{1-\nu}{2}b_jc_k$	$b_k^2+\frac{1-\nu}{2}c_k^2$	$\frac{1+\nu}{2}b_kc_k$
$\nu b_ic_k+\frac{1-\nu}{2}c_ib_k$	$c_ic_k+\frac{1-\nu}{2}b_ib_k$	$\nu b_jc_k+\frac{1-\nu}{2}c_jb_k$	$c_jc_k+\frac{1-\nu}{2}b_jb_k$	$\frac{1+\nu}{2}b_kc_k$	$c_k^2+\frac{1-\nu}{2}b_k^2$

$\frac{e\,E}{\Delta(1-\nu^2)}$

Fig. 70. - Matrice de rigidité en contrainte plane.

5.4 - PROGRAMME PRINCIPAL

Dans le programme principal, nous avons introduit la variable 'Nat$', qui définit la nature du problème : contrainte plan ou déformation plane. Cinq cas de charge ont été prévus. Le tableau 'E' définit le module de YOUNG et le coefficient de POISSON du matériau. Le tableau 'Epais', l'épaisseur et la densité du matériau, afin de pouvoir générer éventuellement un chargement équivalent au poids propre. Le listing du programme principal est reproduit ci-dessous :

```
10    ! ******************************************************
20    ! *                                                    *
30    ! *        CONTRAINTE PLANE OU DEFORMATION PLANE       *
40    ! *                                                    *
50    ! *           PAR LA METHODE DES DEPLACEMENTS          *
60    ! *                                                    *
70    ! *  *          *****    *******     ***     *******  *
80    ! *  *         *     *      *       *  *       *     *
90    ! *  *         *            *      *            *     *
100   ! *  *          *****       *      *            *     *
110   ! *  *              *       *      *            *     *
120   ! *  *         *     *      *       *  *       *     *
130   ! *  *******    *****       *        ***        *     *
140   ! *                                                    *
150   ! ******************************************************
160   !
170   ! BLOC COMMUN
180   OPTION BASE 1
190   PRINTER IS 7,1,WIDTH(130)
200   !
210   ! Définition des variables
220   !
230   ! 1°/ VARIABLES DEFINISSANT LE PROBLEME
240   !
250   ! Nat$..............Nature du probleme
260   !                   Nat$="C" Contrainte plane
270   !                   Nat$="D" Déformation plane
280   ! Nnoeuds...........Nombre de noeuds
290   ! Nelem.............Nombre d'éléments
300   ! Nnelem............Nombre de noeuds par élément
310   ! Nchar.............Nombre de cas de charges
320   ! Ndl...............Nombre de degrés de liberté par noeud
330   !                   Ndl = 2
340   ! Nmodul............Nombre de modules d'élasticité et de coef. de POISSON
350   ! Nepais............Nombre d'épaisseurs diffèrentes
360   ! Titre$............Titre du probleme
370   ! Charges$..........Titres des cas de charge
380   ! X(I), Y(I)........Coordonnées du noeud I
```

```
390   ! Isup(I) ..........Code appui
400   !                   = 00  Noeud libre
410   !                   = 10  Noeud bloqué suivant X
420   !                   =  1  Noeud bloqué suivant Y
430   !                   = Autre combinaison : 11
440   ! Liais(I,1)........Numéro du 1 er noeud de l'élément
450   ! Liais(I,2)........Numéro du 2 ème noeud de l'élément
460   ! Liais(I,3)........Numéro du 3 ème noeud de l'élément
470   ! Liais(I,4)........Numéro du module d'élasticité E et coef POISSON
480   ! Liais(I,5)........Numéro de l'épaisseur et densité
490   COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nepais
500   COM Titre$[80],Charge$(5)[80],Nat$
510   COM X(100),Y(100),E(5,2),Epais(15,2)
520   COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
530   !
540   ! 2°/ VARIABLES AUXILIAIRES EN COMMUN
550   !
560   ! Ndlb..............Nombre de degrés de liberté fixés (appuis)
570   ! Nn................Noeuds*Ndl : Dimension du système linéaire
580   ! Ntot..............Nombre de coefficients de la matrice A
590   ! Ipp(I)............=1 Si le Ième cas de charge comprend le poids propre
600   !                   =0 Si non
610   ! Iappui(I) ........Numéros des degrés de liberté fixés
620   ! Maxa(I)...........Adresses des termes diagonaux de la matrice
630   ! A(I)..............Tableau des coefficients de la matrice et des
640   !                   seconds membres
650   ! R(I,15)...........de 1 à 10 Car. des éléments
660   !                   de 11 à 15 les déformations dues à la température
670   COM Ndlb,Nn,Ntot,Ipp(5)
680   COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
690   COM A(5150),R(200,15)
700   !
710   ! Initialisation
720   !
730   MAT Liais=(0)  !
740   MAT Isup=(0)   !
750   MAT Maxa=(0)   !
760   MAT A=(0)      !  CAR VARIABLES EN COMMUN
770   MAT R=(0)      !
780   MAT Ipp=(0)    !
790   Nepais=1
800   Nmodul=1
810   Nnelem=3       !  CAR ELEMENTS TRIANGULAIRES
820   Ndl=2          !  DEUX ddl PAR NOEUDS
830   !
840   ! Lecture des données générales et des coordonnées des noeuds
850   !
860   CALL Lect
870   !
880   ! Calcul des indices des degrés de liberté bloqués
890   !
```

```
900   CALL Indapp(Nnoeuds,Ndl,Ndlb,Isup(*),Iappui(*))
910   !
920   ! Reproduction des données relatives à la structure
930   !
940   CALL Imprim
950   !
960   FOR I=1 TO Nelem
970       !
980       ! Formation de la matrice de rigidite de la liaison I
990       !
1000      CALL Format(I)
1010      !
1020      ! Calcul de la hauteur des colonnes correspondantes
1030      !
1040      CALL Hcol(I,Ndl,Nnelem,Liais(*),Maxa(*))
1050      !
1060  NEXT I
1070  !
1080  ! Calcul des indices des termes diagonaux
1090  !
1100  CALL Indiag(Nn,Ntot,Maxa(*))
1110  !
1120  ! Assemblage de la matrice globale
1130  !
1140  CALL Assemb
1150  !
1160  ! Lecture des charges et création du ou des seconds membres
1170  !
1180  CALL Second
1190  !
1200  ! Modification de la matrice en fonction des appuis
1210  !
1220  CALL Modif(Nn,Ndlb,A(*),Maxa(*),Iappui(*))
1230  !
1240  ! Résolution du système linéaire
1250  !
1260  CALL Solve(Nn,Ntot,Nchar,A(*),Maxa(*))
1270  !
1280  ! Pour chaque cas de charge, impression des déplacements des noeuds,
1290  ! calcul et impression des contraintes et des réactions d'appuis.
1300  !
1310  Indice=Maxa(Nn+1)-Nn ! permet de récuperer les déplacements de chaque
1320  !                     cas de charge dans le tableau A.
1330  PRINT LIN(2)
1340  PRINT "RESULTATS"
1350  PRINT
1360  FOR I=1 TO Nchar
1370      !
1380      PRINT
1390      PRINT "CAS DE CHARGE N° ";I
1400      PRINT "================"
1410      PRINT Charge$(I)
```

```
1420      !
1430      Indice=Indice+Nn
1440      !
1450      ! Impression des déplacements
1460      !
1470      CALL Depl(Indice,Ndl,Nnoeuds,A(*))
1480      !
1490      ! Impression des contraintes et des réactions d'appuis
1500      !
1510      CALL Effn(Indice,I)
1520      !
1530      PRINT LIN(2)
1540  NEXT I
1550  !
1560  DISP "FIN PROBLEME. FAIRE CONTINUE POUR UN AUTRE PROBLEME"
1570  PAUSE
1580  GOTO 730
1590  END
```

5.5 - LECTURE DES DONNÉES

Les problèmes d'élasticité traités par la méthode des éléments finis nécessitent un découpage du domaine en un grand nombre d'éléments. Il n'est pas pensable d'introduire la définition des éléments et les coordonnées des nœuds à l'aide du programme 'Lect', qui est reproduit ici pour des raisons de structure logique du programme. Un pis-aller consiste à utiliser un sous-programme dans lequel les données sont en 'DATA' et les variables à initialiser, en 'COM'. En fait, pour un programme destiné à être utilisé fréquemment par des personnes différentes, il convient d'attacher une grande importance à la méthode de description du maillage. Le listing du sous-programme 'Lect', reproduit ci-après, ne fait que définir les données nécessaires.

```
1600  !
1610  ! ******************************************************************
1620  SUB Lect
1630  ! ******************************************************************
1640  !
1650  ! Appelé par Prog. Princ.
1660  !
1670  OPTION BASE 1
1680  !
1690  ! Lecture des données relatives à l'ossature
1700  !
1710  COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nepais
```

```
1720  COM Titre$[80],Charge$(5)[80],Nat$
1730  COM X(100),Y(100),E(5,2),Epais(15,2)
1740  COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
1750  !
1760  COM Ndlb,Nn,Ntot,Ipp(5)
1770  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
1780  COM A(5150),R(200,15)
1790  !
1800  INPUT "Titre",Titre$
1810  Nat$="C"
1820  INPUT "Contrainte plane (C) ou déformation plane (D) ?",Nat$
1830  INPUT "Nombre de Noeuds",Nnoeuds
1840  INPUT "Nombre d'éléments",Nelem
1850  INPUT "Nombre de cas de charge",Nchar
1860  INPUT "Nombre de d'épaisseurs (1)",Nepais
1870  INPUT "Nombre de Modules E (1)",Nmodul
1880  Nn=Nnoeuds*Ndl
1890  !
1900  ! Lecture des coordonnées des noeuds
1910  !
1920  FOR I=1 TO Nnoeuds
1930      INPUT "X, Y, ",X(I),Y(I)
1940      INPUT "Code Appui ? (0)=Noeud libre",Isup(I)
1950  NEXT I
1960  !
1970  ! Définition des liaisons
1980  !
1990  FOR I=1 TO Nelem
2000      DISP "Noeud I, Noeud J, Noeud K ?"
2010      INPUT Liais(I,1),Liais(I,2),Liais(I,3)
2020      Liais(I,4)=1
2030      Liais(I,5)=1
2040      DISP "N° Epaisseur (1)  N° Module (1) FAIRE CONTINUE Si 1 et 1"
2050      INPUT Liais(I,4),Liais(I,5)
2060  NEXT I
2070  !
2080  ! Lecture des sections
2090  !
2100  FOR I=1 TO Nepais
2110      DISP "Epaisseur, Densité N° ";I
2120      INPUT Epais(I,1),Epais(I,2)
2130  NEXT I
2140  !
2150  ! Lecture des modules
2160  !
2170  FOR I=1 TO Nmodul
2180      DISP "Module N° ";I
2190      INPUT E(I,1)
2200      DISP "Coef. POISSON N° ";I
2210      INPUT E(I,2)
2220  NEXT I
2230  !
2240  SUBEXIT
2250  SUBEND
```

5.6 - REPRODUCTION DES DONNÉES

Si la reproduction des données est toujours souhaitable, il faudra prévoir en plus des contrôles graphiques reproduisant le maillage. Le listing du sous-programme 'Imprim' est donné ci-dessous :

```
2710  ! ******************************************************************
2720  SUB Imprim
2730  ! ******************************************************************
2740  !
2750  ! Appelé par Prog. Princ.
2760  !
2770  OPTION BASE 1
2780  !
2790  ! Reproduction des données générales de la structure
2800  !
2810  COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nepais
2820  COM Titre$[80],Charge$(5)[80],Nat$
2830  COM X(100),Y(100),E(5,2),Epais(15,2)
2840  COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
2850  !
2860  COM Ndlb,Nn,Ntot,Ipp(5)
2870  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
2880  COM A(5150),R(200,15)
2890  !
2900  PRINT "TITRE : "&Titre$
2910  PRINT
2920  IF Nat$="C" THEN PRINT " Probleme de contrainte plane."
2930  IF Nat$="D" THEN PRINT " Probleme de déformation plane."
2940  PRINT
2950  PRINT "Nombre de noeuds = ";Nnoeuds
2960  PRINT "Nombre d'éléments= ";Nelem
2970  PRINT "Nombre de cas de charges = ";Nchar
2980  PRINT "Nombre d'épaisseurs et densités différentes = ";Nepais
2990  PRINT "Nombre de modules d'élasticité = ";Nmodul
3000  PRINT
3010  PRINT "COORDONNEES DES NOEUDS"
3020  PRINT
3030  PRINT " N°        X             Y       Code appui"
3040  PRINT
3050  FOR I=1 TO Nnoeuds
3060      PRINT USING 3070;I,X(I),Y(I),Isup(I)
3070      IMAGE DDD,3X,MDDD.DDD,5X,MDDD.DDD,11X,DDD
3080  NEXT I
3090  PRINT
3100  PRINT "DEFINITION DES ELEMENTS"
3110  PRINT
3120  PRINT "Elément   I         J          K      N° Sect.  N° Module"
3130  PRINT
3140  FOR I=1 TO Nelem
```

```
3150      PRINT USING 3160;I,Liais(I,1),Liais(I,2),Liais(I,3),Liais(I,4),Liais(I
,5)
3160      IMAGE DDD,5X,DDD,6X,DDD,8X,DD,8X,DD,8X,DD
3170  NEXT I
3180  PRINT
3190  PRINT "EPAISSEURS ET DENSITE DES ELEMENTS"
3200  PRINT
3210  FOR I=1 TO Nepais
3220      PRINT "Epaisseur N° ";I," = ";Epais(I,1)
3230      PRINT "Densité   N° ";I," = ";Epais(I,2)
3240      PRINT
3250  NEXT I
3260  PRINT
3270  PRINT "MODULES D'ELASTICITE"
3280  PRINT
3290  FOR I=1 TO Nmodul
3300      PRINT "Module E     N° ";I;" = ";E(I,1)
3310      PRINT "Coef POISSON N° ";I;" = ";E(I,2)
3320  NEXT I
3330  SUBEXIT
3340  SUBEND
```

5.7 - MATRICE 'B' ET MATRICE D'ÉLASTICITÉ 'D'

Les coefficients de la matrice 'B' sont calculés à partir des coordonnées des nœuds des éléments, et rangés dans la mémoire auxiliaire 'R'. Les coefficients de la matrice d'élasticité sont calculés à partir des caractéristiques physiques de l'élément (module de YOUNG, coefficient de POISSON) et de la nature du problème traité : contrainte plane ou déformation plane.

L'organigramme du sous-programme 'Format' est reproduit figure 71.

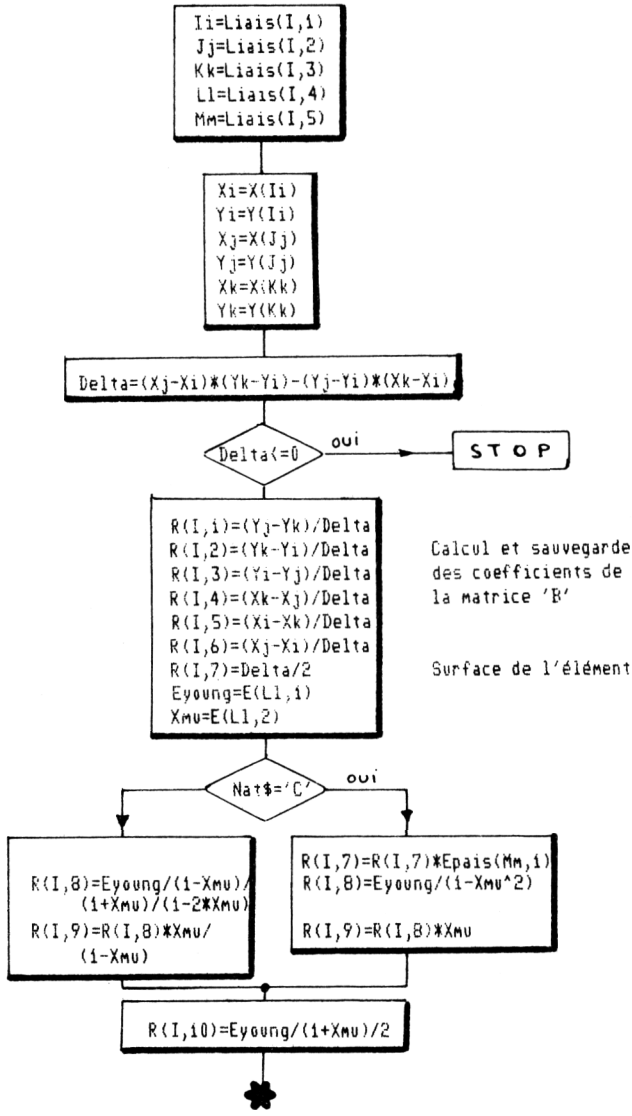


Fig. 71. - Organigramme de 'Format'.

Listing du sous-programme 'Format' :

```
3350  ! ******************************************************************
3360  SUB Format(I)
3370  ! ******************************************************************
3380  !
3390  ! Appelé par Prog. Princ.
3400  !
3410  OPTION BASE 1
3420  !
3430  ! Calcul des éléments pour la matrice de rigidité
3440  !
3450  COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nepais
3460  COM Titre$[80],Charge$(5)[80],Nat$
3470  COM X(100),Y(100),E(5,2),Epais(15,2)
3480  COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
3490  !
3500  COM Ndlb,Nn,Ntot,Ipp(5)
3510  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
3520  COM A(5150),R(200,15)
3530  !
3540  Ii=Liais(I,1)
3550  Jj=Liais(I,2)
3560  Kk=Liais(I,3)
3570  Ll=Liais(I,4)
3580  Mm=Liais(I,5)
3590  Xi=X(Ii)
3600  Yi=Y(Ii)
3610  Xj=X(Jj)
3620  Yj=Y(Jj)
3630  Xk=X(Kk)
3640  Yk=Y(Kk)
3650  Delta=(Xj-Xi)*(Yk-Yi)-(Yj-Yi)*(Xk-Xi)
3660  IF Delta>0 THEN 3690
3670  PRINT "ERREUR ELEMENT : Surface négative ou nulle  ";I
3680  STOP
3690  R(I,1)=(Yj-Yk)/Delta
3700  R(I,2)=(Yk-Yi)/Delta
3710  R(I,3)=(Yi-Yj)/Delta
3720  R(I,4)=(Xk-Xj)/Delta
3730  R(I,5)=(Xi-Xk)/Delta
3740  R(I,6)=(Xj-Xi)/Delta
3750  R(I,7)=Delta/2
3760  Eyoung=E(Ll,1)
3770  Mu=E(Ll,2)
3780  IF Nat$="C" THEN 3880
3790  !
3800  ! Déformation plane
3810  !
3820  R(I,8)=Eyoung*(1-Mu)/(1+Mu)/(1-2*Mu)
3830  R(I,9)=R(I,8)*Mu/(1-Mu)
```

```
3840  GOTO 3910
3850  !
3860  ! Contrainte plane
3870  !
3880  R(I,7)=R(I,7)*Epais(Mm,1)
3890  R(I,8)=Eyoung/(1-Mu*Mu)
3900  R(I,9)=R(I,8)*Mu
3910  R(I,10)=Eyoung/(1+Mu)/2
3920  !
3930  SUBEXIT
3940  SUBEND
```

5.8 - MATRICE DE RIGIDITÉ DE L'ÉLÉMENT

La matrice est calculée globalement à l'aide des fonctions matricielles. On reconstitue 'B' et 'D' à partir des valeurs sauvegardées dans 'R' ; on calcule la matrice de rigidité 'Rr' que l'on met sous la forme prévue pour son cumul dans la matrice globale.

L'organigramme du sous-programme 'Matrig' est donné figure 72.

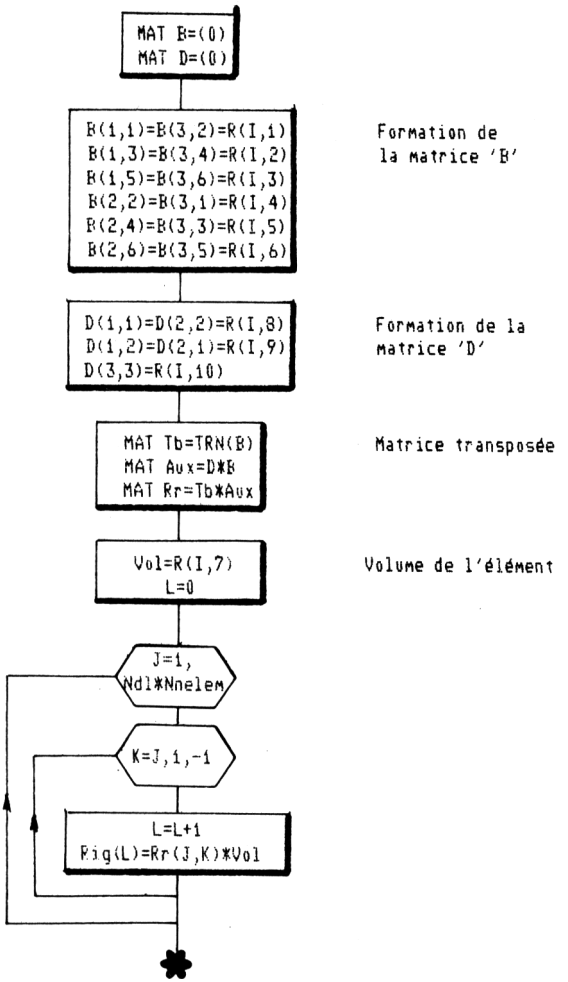


Fig. 72. - Organigramme de 'Matrig'.

Le listing correspondant est reproduit ci-dessous :

```
4780  ! ****************************************************************
4790  SUB Matrig(R(*),Rig(*),Ndl,Nnelem,I)
4800  ! ****************************************************************
4810  !
4820  ! Appelé par Assemb
4830  !
4840  OPTION BASE 1
4850  !
4860  ! Calcul de la matrice de rigidité de la barre sous la forme :
4870  !
4880  ! Rig(1)  Rig(3)  Rig(6) ....
4890  !         Rig(2)  Rig(5) ....
4900  !                 Rig(4) ....
4910  !
4920  DIM B(3,6),D(3,3),Tb(6,3),Aux(3,6),Rr(6,6)
4930  MAT B=(0)
4940  MAT D=(0)
4950  !
4960  B(1,1)=B(3,2)=R(I,1)
4970  B(1,3)=B(3,4)=R(I,2)
4980  B(1,5)=B(3,6)=R(I,3)
4990  B(2,2)=B(3,1)=R(I,4)
5000  B(2,4)=B(3,3)=R(I,5)
5010  B(2,6)=B(3,5)=R(I,6)
5020  !
5030  D(1,1)=D(2,2)=R(I,8)
5040  D(1,2)=D(2,1)=R(I,9)
5050  D(3,3)=R(I,10)
5060  !
5070  MAT Tb=TRN(B)
5080  MAT Aux=D*B
5090  MAT Rr=Tb*Aux
5100  !
5110  Vol=R(I,7)
5120  !
5130  L=0
5140  FOR J=1 TO Ndl*Nnelem
5150      FOR K=J TO 1 STEP -1
5160          L=L+1
5170          Rig(L)=Rr(J,K)*Vol
5180      NEXT K
5190  NEXT J
5200  !
5210  SUBEXIT
5220  SUBEND
```

5.9 - DÉFINITION DES CHARGES

Comme pour les ossatures, on a prévu des charges sur les nœuds, le poids propre, les effets thermiques et les déplacements d'appuis.

Les différences avec le programme d'ossatures étant minimes, nous reproduisons ci-dessous le listing du sous-programme 'Second' sans en faire les organigrammes.

```
5730  ! ****************************************************************
5740  SUB Second
5750  ! ****************************************************************
5760  !
5770  ! Appelé par Prog. Princ.
5780  ! Appelle : Genererterp, Genererdepl
5790  !
5800  OPTION BASE 1
5810  !
5820  ! Introduction du chargement, reproduction des charges
5830  ! et constitution du (ou des) seconds membres du système
5840  !
5850  COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nepais
5860  COM Titre$[80],Charges$(5)[80],Nat$
5870  COM X(100),Y(100),E(5,2),Epais(15,2)
5880  COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
5890  !
5900  COM Ndlb,Nn,Ntot,Ipp(5)
5910  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
5920  COM A(5150),R(200,15)
5930  !
5940  DIM F(2),Coef(2),D(200)
5950  !
5960  Indice=Maxa(Nn+1)-Nn
5970  FOR I=1 TO Nchar
5980      Ic=0              ! Paramètre indiquant les déplacements d'appuis
5990      MAT D=(0)
6000      Indice=Indice+Nn ! Indice du 1er Coef. du vecteur second membre
6010      PRINT LIN(3)
6020      PRINT "CAS DE CHARGE N° ";I
6030      PRINT "-----------------"
6040      PRINT
6050      INPUT " Titre du cas de charge ?",Charges$(I)
6060      PRINT Charges$(I)
6070      PRINT
6080      Index=5
6090      DISP " NATURE DU CHARGEMENT ?"
6100      DISP " 1 : Charges aux noeuds"
6110      DISP " 2 : Poids propre"
```

```
6120      DISP " 3 : Température"
6130      DISP " 4 : Déplacement d'appui"
6140      INPUT " 5 : FIN",Index
6150      ON Index GOTO C1,C2,C3,C4,Nexti
6160      !
6170 C1:  ! Charges aux noeuds
6180      !
6190      PRINT "CHARGES AUX NOEUDS"
6200      PRINT " N° noeud   Fx     Fy"
6210      DISP "La description du chargement est achevée par la donnée"
6220      DISP "de la charge sur le dernier noeud"
6230      INPUT " N° noeud, Fx, Fy",Inoeud,F(1),F(2)
6240      PRINT USING 6250;Inoeud,F(1),F(2)
6250      IMAGE X,DDD,2X,MD.DDDDE,2X,MD.DDDDE
6260      Ii=Indice+Ndl*(Inoeud-1)-1
6270      FOR K=1 TO Ndl
6280          A(Ii+K)=A(Ii+K)+F(K)
6290      NEXT K
6300      IF Inoeud=Nnoeuds THEN 6080
6310      GOTO 6210 ! Introduction de la charge sur le noeud suivant
6320      !
6330 C2:  ! Génération poids propre
6340      !
6350      PRINT "POIDS PROPRE (Tous les éléments sont pris en compte)"
6360      Ipp(I)=1
6370      FOR L=1 TO Nelem
6380          Ii=Liais(L,1)
6390          Jj=Liais(L,2)
6400          Kk=Liais(L,3)
6410          Ll=Liais(L,5)
6420          !
6430          Dens=Epais(Ll,2)
6440          Po=R(L,7)*Dens/3 ! R(L,7)= Volume de l'élément
6450          !
6460          Ii=Indice+(Ii-1)*Ndl+1
6470          Jj=Indice+(Jj-1)*Ndl+1
6480          Kk=Indice+(Kk-1)*Ndl+1
6490          A(Ii)=A(Ii)-Po
6500          A(Jj)=A(Jj)-Po
6510          A(Kk)=A(Kk)-Po
6520      NEXT L
6530      GOTO 6080
6540      !
6550 C3:  ! Température
6560      !
6570      PRINT "TEMPERATURE"
6580      !
6590      DISP "N° premier élément, N° dernier élément, Alpha et Température"
6600      DISP "d'un groupe d'éléments(Cas de charge terminé obligatoirement"
6610      DISP "avec le numéro du dernier élément de la,structure"
6620      INPUT "N1, N2, Alpha, Temper ?",N1,N2,Alpha,Temper
6630      PRINT N1,N2,Alpha,Temper
```

```
6640      CALL Genertemp(N1,N2,Alpha,Temper,Indice,I)
6650      IF N2=Nelem THEN 6080
6660      GOTO 6620      ! Lecture du groupe d'éléments suivant
6670      !
6680 C4:  ! Déplacements d'appuis
6690      !
6700      PRINT "DEPLACEMENTS IMPOSES DES APPUIS"
6710      !
6720      INPUT " N° du Noeud ?",N
6730      IF Isup(N)=0 THEN Erreur
6740      Ic=Ic+1
6750      Nombre=Isup(N)
6760      CALL Decode(Nombre,Ndl,Coef(*))
6770      INPUT "DeltaX, DeltaY ?",F(1),F(2)
6780      PRINT "Noeud N° ";N," Dx = ";F(1)," Dy = ";F(2)
6790      Rep$="Oui"
6800      In=(N-1)*Ndl
6810      !
6820      ! Seuls les déplacements imposés correspondants à des degrés de
6830      ! liberté bloqués sont pris en compte et placés dans le vecteur D
6840      !
6850      FOR Jj=1 TO Ndl
6860          IF Coef(Jj)=0 THEN 6880
6870          D(In+Jj)=F(Jj)
6880      NEXT Jj
6890      INPUT "Autre déplacement d'appui (Oui) ?",Rep$
6900      IF Rep$="Oui" THEN 6720
6910      GOTO 6080
6920 Erreur: DISP "Le noeud n'est pas un appui"
6930      GOTO 6720
6940 Nexti:!
6950  !
6960  ! Modification du second membre en fonction des déplacements d'appuis
6970  !
6980  CALL Genererdepl(Indice,Ic,Nn,Ndlb,D(*),A(*),Iappui(*),Maxa(*))
6990  !
7000  NEXT I
7010  SUBEXIT
7020  SUBEND
```

5.10 - CHARGES NODALES ÉQUIVALENTES AUX EFFETS THERMIQUES

Les effets thermiques sont des déformations imposées. On montre que, dans le cas du problème de contrainte plane, on a :

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \Delta t \\ \alpha \Delta t \\ 0 \end{vmatrix}$$

et, dans le cas de déformation plane :

$$\begin{vmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = (1+\nu) \begin{vmatrix} \alpha \Delta t \\ \alpha \Delta t \\ 0 \end{vmatrix}$$

On en déduit les contraintes donnant les mêmes déformations :

$$\sigma = [\mathrm{D}]\, \epsilon$$

et, par application du théorème des travaux virtuels, on obtient les charges nodales équivalentes :

$$\mathrm{F} = \int_v {}^t\mathrm{B}\, \mathrm{D}\, \epsilon\, dv$$

En tenant compte des coefficients des matrices 'B' et 'D', on trouve :

$$\begin{array}{|c|}\hline \mathrm{F}_{xi} \\ \hline \mathrm{F}_{yi} \\ \hline \mathrm{F}_{xj} \\ \hline \mathrm{F}_{yj} \\ \hline \mathrm{F}_{xk} \\ \hline \mathrm{F}_{yk} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|}\hline b_i \\ \hline c_i \\ \hline b_j \\ \hline c_j \\ \hline b_k \\ \hline c_k \\ \hline \end{array} \frac{\mathrm{E}\, e\, (\alpha \Delta t)}{2\,(1-\nu)}$$

en contrainte plane.

L'organigramme du sous-programme 'Generertemp' est reproduit figure 73.

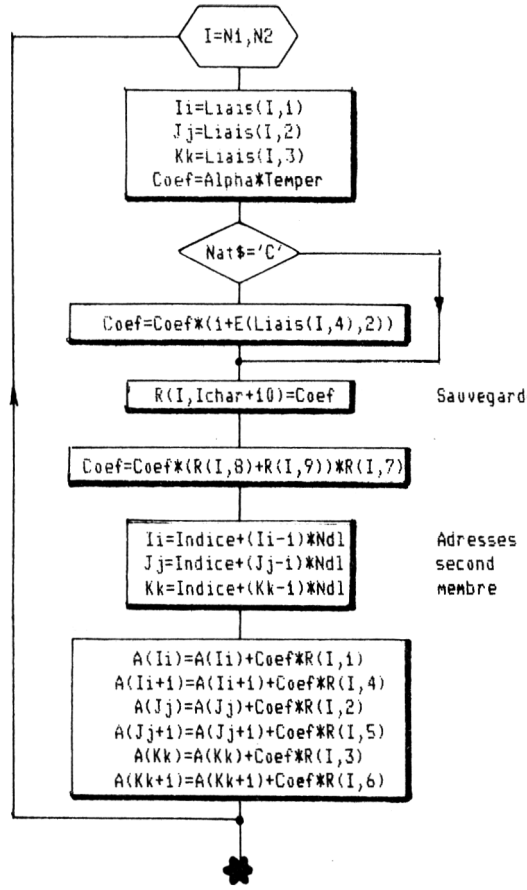


Fig. 73. - Organigramme de 'Generertemp'.

Le listing en est donné ci-dessous :

```
7030  ! ****************************************************************
7040  SUB Genereertemp(N1,N2,Alpha,Temper,Indice,Ichar)
7050  ! ****************************************************************
7060  !
7070  ! Appelé par Second
7080  !
7090  OPTION BASE 1
7100  !
7110  ! Genère les charges nodales dues à la température
7120  !
7130  COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nepais
7140  COM Titre$[80],Charge$(5)[80],Nat$
7150  COM X(100),Y(100),E(5,2),Epais(15,2)
7160  COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
7170  !
7180  COM Ndlb,Nn,Ntot,Ipp(5)
7190  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
7200  COM A(5150),R(200,15)
7210  !
7220  FOR I=N1 TO N2
7230      Ii=Liais(I,1)
7240      Jj=Liais(I,2)
7250      Kk=Liais(I,3)
7260      Coef=Alpha*Temper
7270      IF Nat$="C" THEN 7290
7280      Coef=Coef*(1+E(Liais(I,4),2))
7290      R(I,Ichar+10)=Coef
7300      Coef=Coef*(R(I,8)+R(I,9))*R(I,7)
7310      Ii=Indice+(Ii-1)*Ndl
7320      Jj=Indice+(Jj-1)*Ndl
7330      Kk=Indice+(Kk-1)*Ndl
7340      A(Ii)=A(Ii)+Coef*R(I,1)
7350      A(Ii+1)=A(Ii+1)+Coef*R(I,4)
7360      A(Jj)=A(Jj)+Coef*R(I,2)
7370      A(Jj+1)=A(Jj+1)+Coef*R(I,5)
7380      A(Kk)=A(Kk)+Coef*R(I,3)
7390  NEXT I
7400  SUBEXIT
7410  SUBEND
```

5.11 - IMPRESSION DES DÉPLACEMENTS

Le listing correspondant est reproduit ci-après :

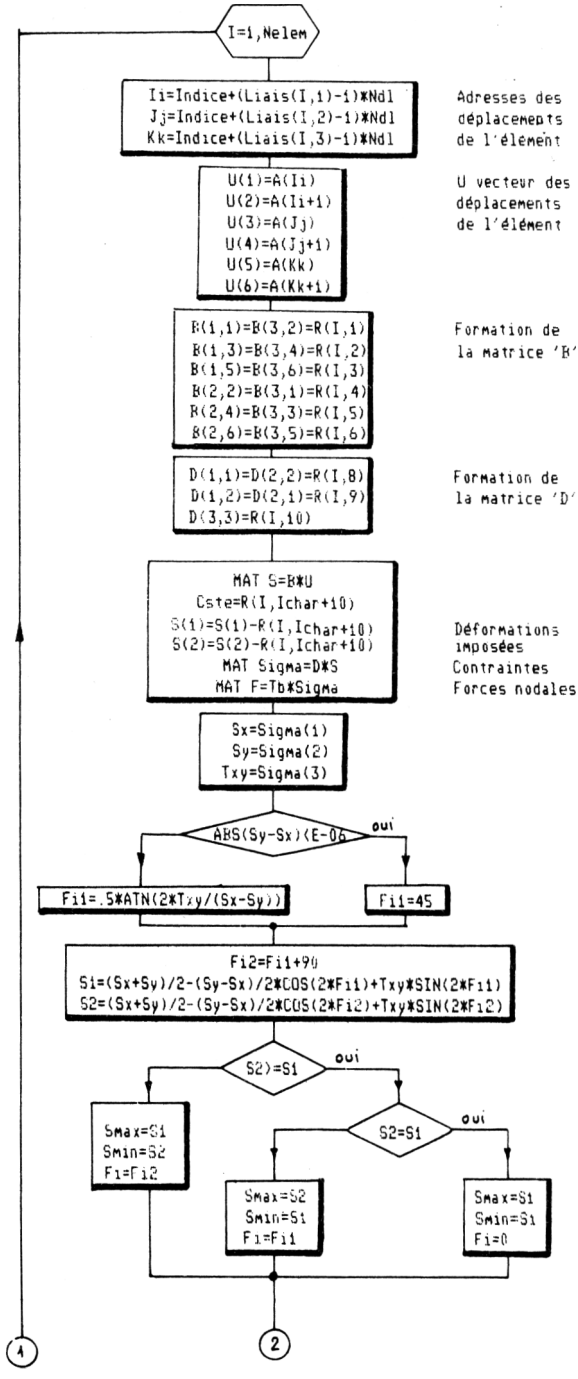
```
9360  ! ************************************************************
9370  SUB Depl(Indice,Ndl,Nnoeuds,A(*))
9380  ! ************************************************************
9390  !
9400  ! Appelé par Prog. Princ.
9410  !
9420  OPTION BASE 1
9430  !
9440  ! Impression des déplacements
9450  !
9460  PRINT LIN(1)
9470  PRINT "D E P L A C E M E N T S   D E S   N OE U D S"
9480  PRINT
9490  PRINT " N° Noeud        Dx              Dy"
9500  PRINT
9510  FOR I=1 TO Nnoeuds
9520      Ii=Indice+(I-1)*Ndl
9530      PRINT USING 9540;I,A(Ii),A(Ii+1)
9540      IMAGE 3X,DDD,5X,MD.DDDDDDE,2X,MD.DDDDDDE
9550  NEXT I
9560  SUBEXIT
9570  SUBEND
```

5.12 - CALCUL DES CONTRAINTES ET DES RÉACTIONS D'APPUI

Une boucle sur les éléments permet de calcul les contraintes à partir des déplacements. Il faut d'abord reconstruire la matrice 'B', calculer les déformations, soustraire les éventuelles déformations d'origine thermique et, à l'aide de la matrice d'élasticité de l'élément, calculer les contraintes. On calcule également les forces nodales équivalentes afin de déterminer les réactions d'appuis.

Outre ces résultats, il est particulièrement intéressant de calculer les contraintes principales ainsi que les directions principales.

L'organigramme du sous-programme 'Effn' est donné figure 74.


I=1,Nelem
Ii=Indice+(Liais(I,1)-1)*Ndl
Jj=Indice+(Liais(I,2)-1)*Ndl
Kk=Indice+(Liais(I,3)-1)*Ndl
Adresses des déplacements de l'élément
U(1)=A(Ii)
U(2)=A(Ii+1)
U(3)=A(Jj)
U(4)=A(Jj+1)
U(5)=A(Kk)
U(6)=A(Kk+1)
U vecteur des déplacements de l'élément
B(1,1)=B(3,2)=R(I,1)
B(1,3)=B(3,4)=R(I,2)
B(1,5)=B(3,6)=R(I,3)
B(2,2)=B(3,1)=R(I,4)
R(2,4)=B(3,3)=R(I,5)
B(2,6)=B(3,5)=R(I,6)
Formation de la matrice 'B'
D(1,1)=D(2,2)=R(I,8)
D(1,2)=D(2,1)=R(I,9)
D(3,3)=R(I,10)
Formation de la matrice 'D'
MAT S=B*U
Cste=R(I,Ichar+10)
S(1)=S(1)-R(I,Ichar+10)
S(2)=S(2)-R(I,Ichar+10)
MAT Sigma=D*S
MAT F=Tb*Sigma
Déformations imposées
Contraintes
Forces nodales
Sx=Sigma(1)
Sy=Sigma(2)
Txy=Sigma(3)
ABS(Sy-Sx)(E-06
oui
Fi1=.5*ATN(2*Txy/(Sx-Sy))
Fi1=45
Fi2=Fi1+90
S1=(Sx+Sy)/2-(Sy-Sx)/2*COS(2*Fi1)+Txy*SIN(2*Fi1)
S2=(Sx+Sy)/2-(Sy-Sx)/2*COS(2*Fi2)+Txy*SIN(2*Fi2)
S2)=S1
oui
Smax=S1
Smin=S2
Fi=Fi2
S2=S1
oui
Smax=S2
Smin=S1
Fi=Fi1
Smax=S1
Smin=S1
Fi=0
1
2

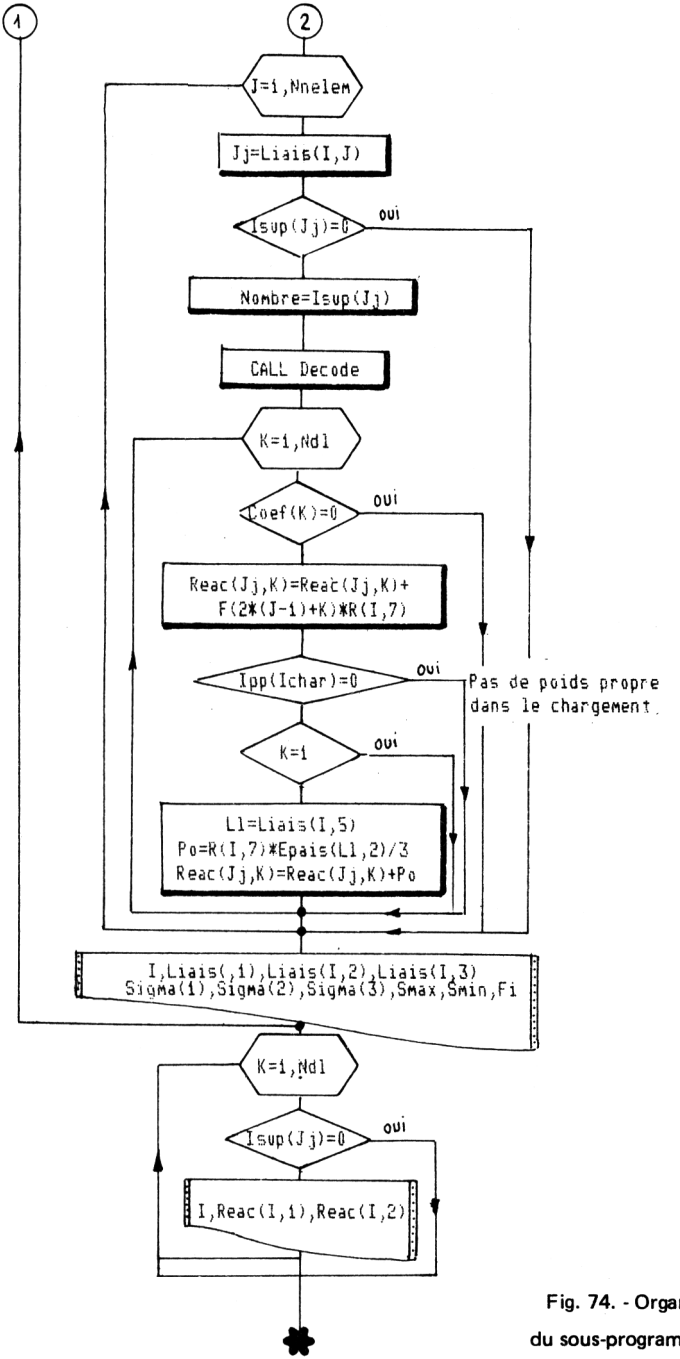


Fig. 74. - Organigramme du sous-programme 'Effn'

Le listing du sous-programme 'Effn' :

```
9580  ! ************************************************************
9590  SUB Effn(Indice,Ichar)
9600  ! ************************************************************
9610  !
9620  ! Appelé par Prog. Princ.
9630  !
9640  OPTION BASE 1
9650  DEG
9660  !
9670  ! Calcul et impression des contraintes dans le éléments
9680  ! Calcul et impression des réactions d'appuis.
9690  !
9700  COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul,Nepais
9710  COM Titre$[80],Charges$(5)[80],Nat$
9720  COM X(100),Y(100),E(5,2),Epais(15,2)
9730  COM INTEGER Liais(200,5),Isup(100)
9740  !
9750  COM Ndlb,Nn,Ntot,Ipp(5)
9760  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(301)
9770  COM A(5150),R(200,15)
9780  !
9790  DIM Coef(2),Sigma(3),B(3,6),Tb(6,3),U(6),D(3,3),S(3),F(6),Reac(100,2)
9800  MAT Reac=(0)
9810  !
9820  ! Sigma vecteur contraintes
9830  ! S vecteur déformation
9840  ! U vecteur déplacements
9850  ! F vecteur forces nodales
9860  ! B matrice reliant les déplacements aux déformations
9870  ! Tb Matrice transposée de B
9880  ! D matrice d'élasticité
9890  !
9900  PRINT LIN(1)
9910  PRINT " C O N T R A I N T E S   D A N S   L E S   E L E M E N T S"
9920  PRINT
9930  PRINT " N° Elem   I     J     K        Sx          Sy          Txy
Smin        Smax        Teta"
9940  PRINT
9950  FOR I=1 TO Nelem
9960      Ii=Indice+(Liais(I,1)-1)*Ndl
9970      Jj=Indice+(Liais(I,2)-1)*Ndl
9980      Kk=Indice+(Liais(I,3)-1)*Ndl
9990      !
10000     ! Déplacements des noeuds de l'élément I
10010     !
10020     U(1)=A(Ii)
10030     U(2)=A(Ii+1)
10040     U(3)=A(Jj)
10050     U(4)=A(Jj+1)
10060     U(5)=A(Kk)
```

```
10070    U(6)=A(Kk+1)
10080    !
10090    ! Matrice B
10100    !
10110    B(1,1)=B(3,2)=R(I,1)
10120    B(1,3)=B(3,4)=R(I,2)
10130    B(1,5)=B(3,6)=R(I,3)
10140    B(2,2)=B(3,1)=R(I,4)
10150    B(2,4)=B(3,3)=R(I,5)
10160    B(2,6)=B(3,5)=R(I,6)
10170    !
10180    MAT Tb=TRN(B)
10190    !
10200    ! Matrice d'élasticité
10210    !
10220    D(1,1)=D(2,2)=R(I,8)
10230    D(1,2)=D(2,1)=R(I,9)
10240    D(3,3)=R(I,10)
10250    !
10260    ! Calcul des déformations
10270    !
10280    MAT S=B*U
10290    !
10300    ! Prise en compte des déformations imposées
10310    !
10320    S(1)=S(1)-R(I,Ichar+10)
10330    S(2)=S(2)-R(I,Ichar+10)
10340    !
10350    ! Calcul des contraintes
10360    !
10370    MAT Sigma=D*S
10380    !
10390    ! Calcul des forces aux noeuds (pour les réactions d'appuis)
10400    !
10410    MAT F=Tb*Sigma
10420    !
10430    Sx=Sigma(1)
10440    Sy=Sigma(2)
10450    Txy=Sigma(3)
10460    IF ABS(Sy-Sx)<.000001 THEN 10490
10470    Fi1=.5*ATN(2*Txy/(Sx-Sy))
10480    GOTO 10500
10490    Fi1=45
10500    Fi2=Fi1+90
10510    S1=(Sx+Sy)/2-(Sy-Sx)/2*COS(2*Fi1)+Txy*SIN(2*Fi1)
10520    S2=(Sx+Sy)/2-(Sy-Sx)/2*COS(2*Fi2)+Txy*SIN(2*Fi2)
10530    IF S2>=S1 THEN 10580
10540    Smax=S1
10550    Smin=S2
10560    Fi=Fi2
10570    GOTO Suite
10580    IF S2=S1 THEN 10630
```

```
10590     Smax=S2
10600     Smin=S1
10610     Fi=Fi1
10620     GOTO Suite
10630     Smax=Smin=S1
10640     Fi=0
10650 Suite:!
10660     !
10670     ! Calcul des réactions d'appuis
10680     !
10690     FOR J=1 TO Nnelem
10700         Jj=Liais(I,J)
10710         IF Isup(Jj)=0 THEN 10860
10720         Nombre=Isup(Jj)
10730         CALL Decode(Nombre,Nd1,Coef(*))
10740         FOR K=1 TO Nd1
10750             IF Coef(K)=0 THEN 10850
10760             Reac(Jj,K)=Reac(Jj,K)+F(2*(J-1)+K)*R(I,7)
10770             !
10780             ! Prise en compte éventuelle du poids propre
10790             !
10800             IF Ipp(Ichar)=0 THEN 10850
10810             IF K=1 THEN 10850
10820             L1=Liais(I,5)
10830             Po=R(I,7)*Epais(L1,2)/3
10840             Reac(Jj,K)=Reac(Jj,K)+Po
10850         NEXT K
10860     NEXT J
10870     PRINT USING 10880;I,Liais(I,1),Liais(I,2),Liais(I,3),Sigma(1),Sigma(2)
,Sigma(3),Smin,Smax,Fi
10880     IMAGE 4(3X,DDD),2X,5(2X,MD.DDDE),2X,MDDD.DDD
10890 NEXT I
10900 !
10910 ! Impression des Réactions d'appuis.
10920 !
10930 PRINT LIN(1)
10940 PRINT "R E A C T I O N S   D ' A P P U I S"
10950 PRINT
10960 PRINT " N° Noeud        Rx            Ry"
10970 PRINT
10980 FOR I=1 TO Nnoeuds
10990     IF Isup(I)=0 THEN 11020
11000     PRINT USING 11010;I,Reac(I,1),Reac(I,2)
11010     IMAGE 3X,DDD,3X,2(2X,MD.DDDDDDE)
11020 NEXT I
11030 SUBEXIT
11040 SUBEND
```

5.13 - EXEMPLE

Le présent programme a servi pour calculer la répartition des contraintes dans un chapiteau. La modélisation comportait 313 nœuds et 535 éléments. Il a fallu modifier le programme en supprimant tous les commentaires et la mémoire auxiliaire 'R'. Il est intéressant de noter que le nombre total de coefficients de la matrice du système linéaire est théoriquement 391876. La méthode de rangement par 'ligne-de-ciel' n'en conservait que 16567, soit 4.22 %. Le chapiteau était en béton et les aciers tendus dans la partie supérieure sont pris en compte en donnant des caractéristiques convenables à la deuxième bande de triangles (fig. 75). Les données ne sont pas reproduites, et nous présentons uniquement le dessin des contraintes principales de compression et des contraintes principales de traction (fig. 76 et 77).

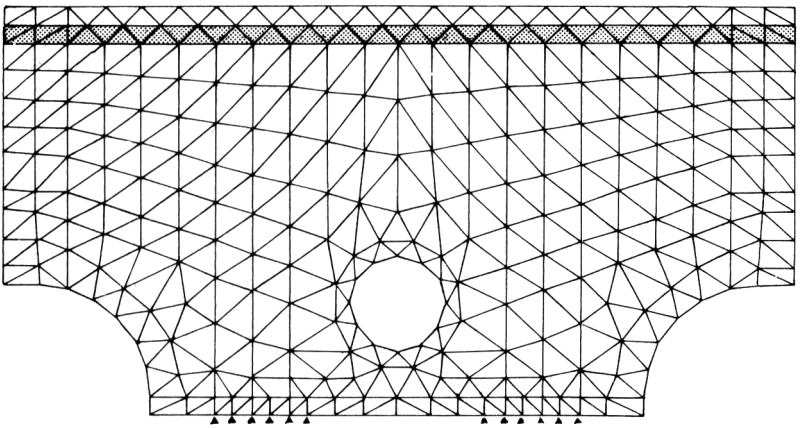


Fig. 75. - Modélisation.

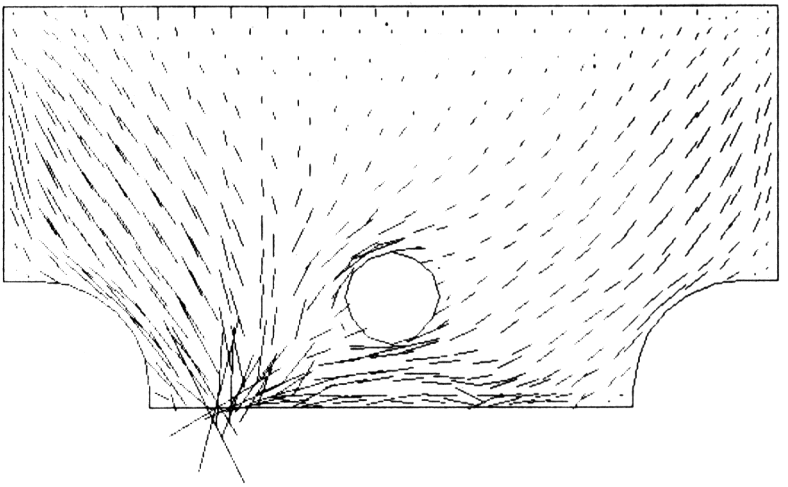


Fig. 76. - Contraintes principales de compression.

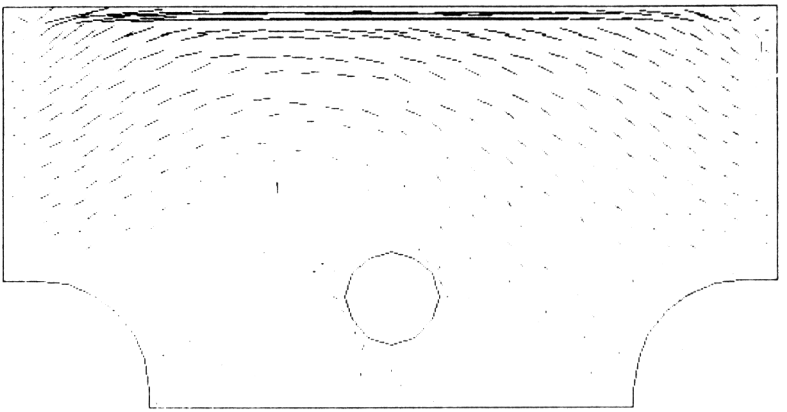


Fig. 77. Contraintes principales de traction.

6 INERTIE DE TORSION

6.1 - BASES THÉORIQUES

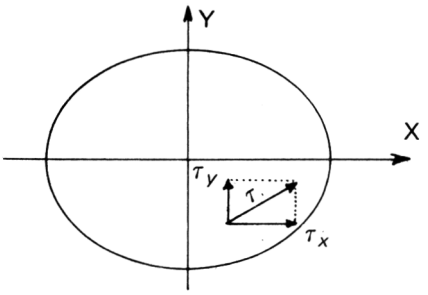
SAINT-VENANT a montré que le problème de la torsion pure se résout à l'aide d'une fonction auxiliaire ϕ par les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2\,G\frac{d\theta}{dz}$$

$$C = 2\iint \phi\, dx\, dy = G\,K\frac{d\theta}{dz}$$

Dans ces relations, G est le module d'élasticité transversal, $d\theta/dz$ l'angle de rotation d'une section par unité de longueur, K l'inertie de torsion et C le moment de torsion.

La fonction ϕ permet de relier ces grandeurs et d'exprimer les composantes de la contrainte de cisaillement (fig. 78). On montre de plus que ϕ doit s'annuler sur le contour de la section



$$\tau_x = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\tau_y = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Fig. 78. - Définition des contraintes.

La flèche prise par une membrane tendue avec une tension constante q sur une ouverture ayant la forme de la section et soumise à une pression p obéit à l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{p}{q}$$

D'où les analogies :

$$w \Longleftrightarrow \phi$$

$$\frac{p}{q} \Longleftrightarrow 2\,G\frac{d\theta}{dz}$$

6.2 - EQUILIBRE D'UN PETIT ÉLÉMENT TRIANGULAIRE DE MEMBRANE

Considérons un petit élément triangulaire dont les sommets sont i, j, k et qui est soumis à une tension q (fig. 79). Cette tension est statiquement équivalente à des forces appliquées au milieu des côtés ayant pour intensité :

$$f_{kx} = (y_j - y_i)\,q \quad f_{ky} = (x_i - x_j)\,q$$

$$f_{ix} = (y_k - y_j)\,q \quad f_{iy} = (x_j - x_k)\,q$$

$$f_{jx} = (y_i - y_k)\,q \quad f_{jy} = (x_k - x_i)\,q$$

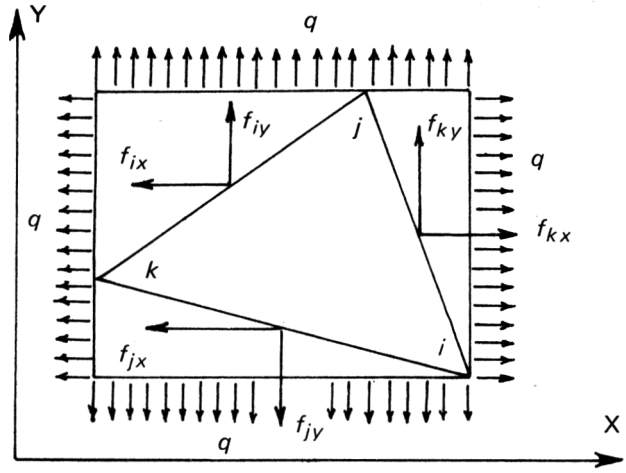


Fig. 79. - Forces équivalentes.

On introduit les notations du paragraphe 5.2

Les forces équivalentes aux sommets du triangle sont alors :

$$F_{ix} = \frac{1}{2}(f_{kx} + f_{jx}) = q\frac{b_i}{2} \qquad F_{iy} = \frac{1}{2}(f_{ky} + f_{jy}) = q\frac{c_i}{2}$$

$$F_{jx} = \frac{1}{2}(f_{ix} + f_{kx}) = q\frac{b_j}{2} \qquad F_{jy} = \frac{1}{2}(f_{iy} + f_{ky}) = q\frac{c_j}{2}$$

$$F_{kx} = \frac{1}{2}(f_{jx} + f_{ix}) = q\frac{b_k}{2} \qquad F_{ky} = \frac{1}{2}(f_{jy} + f_{iy}) = q\frac{c_k}{2}$$

Considérons maintenant le triangle i, j, k après application de la pression p (fig. 80).

Soient W_i, W_j, W_k les déplacements verticaux des sommets i, j, k. Ces déplacements sont supposés être faibles. L'équation du plan passant par i', j', k' s'exprime par :

$$w(z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

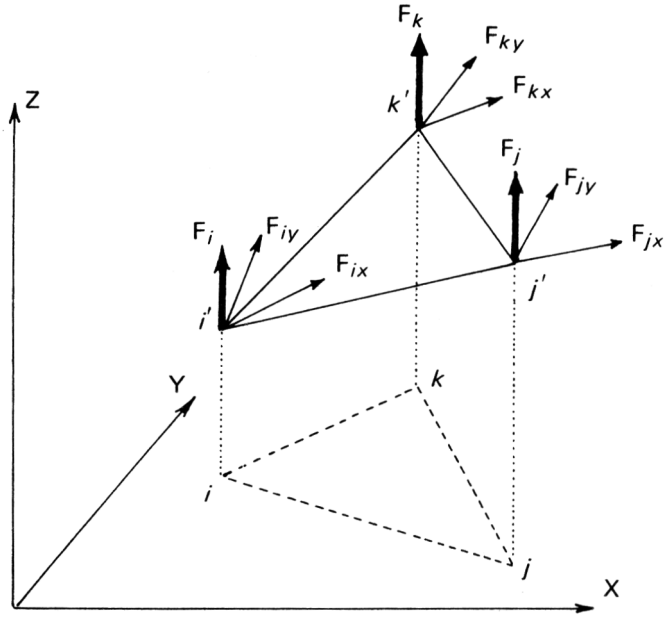


Fig. 80. - Forces nodales sur un élément triangulaire.

et les pentes suivant les axes de coordonnées par :

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_1 \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_2$$

On montre (voir paragraphe 5.2) :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \\ \alpha_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} b_i & b_j & b_k \\ \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} W_i \\ W_j \\ W_k \end{vmatrix}$$

La projection des forces appliquées au sommet i' sur l'axe Z, dans l'hypothèse des petits déplacements s'exprime par :

$$F_i = F_{ix} \frac{\partial w}{\partial x} + F_{iy} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Pour les trois sommets du triangle, on peut écrire :

$$\begin{vmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{vmatrix} = \frac{q}{2} \begin{vmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{2\Delta} \cdot \begin{vmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} W_i \\ W_j \\ W_k \end{vmatrix}$$

En développant cette expression, on obtient la matrice de rigidité de l'élément triangulaire en équilibre de membrane uniformément tendue.

$$\begin{vmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{vmatrix} = \frac{q}{4\Delta} \begin{vmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} W_i \\ W_j \\ W_k \end{vmatrix}$$

Les charges nodales s'obtiennent en écrivant que la pression p multipliée par la surface du triangle se répartie également entre les trois sommets. D'où les charges nodales relatives à l'élément :

$$\begin{vmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \end{vmatrix} = \frac{p\Delta}{3} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

En revenant aux notations utilisées dans le problème de torsion, on trouve pour un triangle :

$$\frac{1}{4\Delta G} \begin{vmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{vmatrix} = \frac{2\Delta}{3} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \frac{d\theta}{dz}$$

Il suffit d'exprimer que chaque nœud de la section est en équilibre sous l'action des éléments incidents pour construire le système

d'équations linéaires dont la solution fournit les déplacements verticaux de la membrane. Il ne reste plus qu'à calculer le volume compris entre la membrane et le plan de la section pour obtenir l'inertie de torsion et les dérivées partielles pour obtenir les composantes de la contrainte totale de cisaillement.

6.3 - LE PROGRAMME PRINCIPAL

Le programme principal se trouve très peu modifié. Les points sur le contour de la section sont définis par Isup(I) = 1. Il n'y a qu'un seul cas de charge (pression p sur la membrane) qui est généré automatiquement.

Listing du programme principal :

```
10   ! ******************************************************
20   ! *                                                    *
30   ! *          CALCUL DE L'INERTIE DE TORSION ET         *
40   ! *                                                    *
50   ! *     DISTRIBUTION DES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT   *
60   ! *                                                    *
70   ! *     ***     *******   ******    *****   *    *
80   ! *      *        *      *    *  *    *  **    *  *
90   ! *      *        *      *    *  *       * *  *  *
100  ! *      *        *      ******    *****   *  * *  *
110  ! *      *        *      *    *        *  *  * *  *
120  ! *      *        *      *    *  *    *  *   **  *
130  ! *     ***       *      *    *   *****   *    *  *
140  ! *                                                    *
150  ! *                                                    *
160  ! ******************************************************
170  !
180  ! BLOC COMMUN
190  OPTION BASE 1
200  PRINTER IS 7,1,WIDTH(130)
210  !
220  ! Définition des variables
230  !
240  ! 1°/ VARIABLES DEFINISSANT LE PROBLEME
250  !
260  ! Nnoeuds...........Nombre de noeuds
270  ! Nelem.............Nombre d'éléments
280  ! Nnelem............Nombre de noeuds par élément
290  ! Nchar.............Nombre de cas de charges (=1)
300  ! Ndl...............Nombre de degrés de liberté par noeud
310  ! Nmodul...........Nombre de modules d'élasticité et de coef. de POISSON
320  ! Titre$...........Titre du probleme
```

```
330   ! X(I), Y(I)........Coordonnées du noeud I
340   ! Isup(I) ..........Code appui
350   !                    = 0   Noeud libre (Intérieur)
360   !                    = 1   Noeud bloqué (Sur le contour extérieur)
370   ! Liais(I,1)........Numéro du 1 er noeud de l'élément
380   ! Liais(I,2)........Numéro du 2 ème noeud de l'élément
390   ! Liais(I,3)........Numéro du 3 ème noeud de l'élément
400   ! Liais(I,4)........Numéro du module d'élasticité G
410   COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul
420   COM Titre$[80]
430   COM X(100),Y(100),G(5)
440   COM INTEGER Liais(200,4),Isup(100)
450   !
460   ! 2°/ VARIABLES AUXILIAIRES EN COMMUN
470   !
480   ! Ndlb...............Nombre de degrés de liberté fixés (appuis)
490   ! Nn.................Noeuds*Ndl : Dimension du système linéaire
500   ! Ntot...............Nombre de coefficients de la matrice A
510   ! Iappui(I) .........Numéros des degrés de liberté fixés
520   ! Maxa(I)...........Adresses des termes diagonaux de la matrice
530   ! A(I)..............Tableau des coefficients de la matrice et des
540   !                    seconds membres
550   ! R(I,6)............de 1 à 6  Coef de la matrice rigidité
560   !                    R(I,7) surface de l'élément
570   COM Ndlb,Nn,Ntot
580   COM INTEGER Iappui(50),Maxa(201)
590   COM A(5150),R(200,7)
600   !
610   ! Initialisation
620   !
630   MAT Isup=(0)    !
640   MAT Maxa=(0)    !
650   MAT A=(0)       !  CAR VARIABLES EN COMMUN
660   MAT R=(0)       !
670   MAT Liais=(0)   !
680   Nmodul=1
690   Nnelem=3
700   Nchar=1
710   Ndl=1
720   !
730   ! Lecture des données générales et des coordonnées des noeuds
740   !
750   ! CALL Lect
760   CALL Donnees
770   !
780   ! Calcul des indices des degrés de liberté bloqués
790   !
800   CALL Indapp(Nnoeuds,Ndl,Ndlb,Isup(*),Iappui(*))
810   !
820   ! Reproduction des données relatives à la structure
830   !
```

```
840   CALL Imprim
850   !
860   FOR I=1 TO Nelem
870       !
880       ! Formation de la matrice de rigidite de la liaison I
890       !
900       CALL Format(I)
910       !
920       ! Calcul de la hauteur des colonnes correspondantes
930       !
940       CALL Hcol(I,Ndl,Nnelem,Liais(*),Maxa(*))
950       !
960   NEXT I
970   !
980   ! Calcul des indices des termes diagonaux
990   !
1000  CALL Indiag(Nn,Ntot,Maxa(*))
1010  !
1020  ! Assemblage de la matrice globale
1030  !
1040  CALL Assemb
1050  !
1060  ! Lecture des charges et création du ou des seconds membres
1070  !
1080  CALL Second
1090  !
1100  ! Modification de la matrice en fonction des appuis
1110  !
1120  CALL Modif(Nn,Ndlb,A(*),Maxa(*),Iappui(*))
1130  !
1140  ! Résolution du système linéaire
1150  !
1160  CALL Solve(Nn,Ntot,Nchar,A(*),Maxa(*))
1170  !
1180  !
1190  Indice=Maxa(Nn+1)-Nn ! permet de récuperer les déplacements de chaque
1200  !                      cas de charge dans le tableau A.
1210  PRINT LIN(2)
1220  PRINT "RESULTATS"
1230  PRINT
1240  FOR I=1 TO Nchar
1250      !
1260      Indice=Indice+Nn
1270      !
1280      ! Impression des déplacements
1290      !
1300      CALL Depl(Indice,Ndl,Nnoeuds,A(*))
1310      !
1320      ! Impression des contraintes et des réactions d'appuis
1330      !
1340      CALL Effn(Indice,I)
1350      !
```

```
1360      PRINT LIN(2)
1370  NEXT I
1380  !
1390  DISP "FIN PROBLEME  FAIRE CONTINUE POUR UN AUTRE PROBLEME"
1400  PAUSE
1410  GOTO 630
1420  END
1430  !
```

6.4 - LECTURE DES DONNÉES

Le sous-programme 'Lect' permet de définir le maillage de la section. Un contrôle graphique sera nécessaire comme pour le programme d'élasticité plane.

Listing du sous-programme 'Lect' :

```
1430  ! ******************************************************************
1440  SUB Lect
1450  ! ******************************************************************
1460  !
1470  ! Appelé par Prog. Princ.
1480  !
1490  OPTION BASE 1
1500  !
1510  ! Lecture des données relatives à l'ossature
1520  !
1530  COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul
1540  COM Titre$[80]
1550  COM X(100),Y(100),G(5)
1560  COM INTEGER Liais(200,4),Isup(100)
1570  !
1580  COM Ndlb,Nn,Ntot
1590  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(201)
1600  COM A(5150),R(200,7)
1610  !
1620  INPUT "Titre",Titre$
1630  INPUT "Nombre de Noeuds",Nnoeuds
1640  INPUT "Nombre d'éléments",Nelem
1650  Nchar=1
1660  Nn=Nnoeuds*Ndl
1670  INPUT "Nombre de Modules G (1)",Nmodul
1680  !
1690  ! Lecture des coordonnées des noeuds
```

```
1700  !
1710  FOR I=1 TO Nnoeuds
1720      INPUT "X, Y, ",X(I),Y(I)
1730      INPUT "Code Appui ? (0)=Noeud libre",Isup(I)
1740  NEXT I
1750  !
1760  ! Définition des liaisons
1770  !
1780  FOR I=1 TO Nelem
1790      DISP "Noeud I, Noeud J, Noeud K ?"
1800      INPUT Liais(I,1),Liais(I,2),Liais(I,3)
1810      Liais(I,4)=1
1820      DISP "N° Section (1)  N° Module (1) FAIRE CONTINUE Si 1 et 1"
1830      INPUT Liais(I,4)
1840  NEXT I
1850  !
1860  ! Lecture des modules
1870  !
1880  FOR I=1 TO Nmodul
1890      DISP "Module N° ";I
1900      INPUT G(I)
1910  NEXT I
1920  !
1930  SUBEXIT
1940  SUBEND
```

6.5 - REPRODUCTION DES DONNÉES

Le sous-programme est adapté à la nature du problème, mais ne saurait remplacer un contrôle graphique. Le listing est reproduit ci-dessous :

```
2420  ! ******************************************************************
2430  SUB Imprim
2440  ! ******************************************************************
2450  !
2460  ! Appelé par Prog. Princ.
2470  !
2480  OPTION BASE 1
2490  !
2500  ! Reproduction des données générales de la structure
2510  !
2520  COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul
2530  COM Titre$[80]
2540  COM X(100),Y(100),G(5)
2550  COM INTEGER Liais(200,4),Isup(100)
2560  !
```

```
2570  COM Ndlb,Nn,Ntot
2580  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(201)
2590  COM A(5150),R(200,7)
2600  !
2610  PRINT "TITRE : "&Titre$
2620  PRINT
2630  PRINT "Nombre de noeuds = ";Nnoeuds
2640  PRINT "Nombre d'éléments= ";Nelem
2650  PRINT "Nombre de modules d'élasticité = ";Nmodul
2660  PRINT
2670  PRINT "COORDONNEES DES NOEUDS"
2680  PRINT
2690  PRINT " N°        X            Y       Code appui"
2700  PRINT
2710  FOR I=1 TO Nnoeuds
2720      PRINT USING 2730;I,X(I),Y(I),Isup(I)
2730      IMAGE DDD,3X,MDDD.DDD,5X,MDDD.DDD,11X,DDD
2740  NEXT I
2750  PRINT
2760  PRINT "DEFINITION DES ELEMENTS"
2770  PRINT
2780  PRINT "Elément   I        J         K      N° Module"
2790  PRINT
2800  FOR I=1 TO Nelem
2810      PRINT USING 2820;I,Liais(I,1),Liais(I,2),Liais(I,3),Liais(I,4)
2820      IMAGE DDD,5X,DDD,6X,DDD,8X,DD,8X,DD
2830  NEXT I
2840  PRINT
2850  PRINT "MODULES D'ELASTICITE"
2860  PRINT
2870  FOR I=1 TO Nmodul
2880      PRINT "Module G     N° ";I;" = ";G(I)
2890  NEXT I
2900  SUBEXIT
2910  SUBEND
```

6.6 - FORMATION DE LA MATRICE DE RIGIDITÉ DE L'ÉLÉMENT

Compte tenu de la simplicité du programme, les six coefficients de la demi-matrice sont calculés et rangés dans la mémoire auxiliaire 'R'. Un contrôle est effectué sur la surface de l'élément, qui ne doit pas être ni négative ni nulle.

L'organigramme du sous-programme 'Format' est donné figure 81.

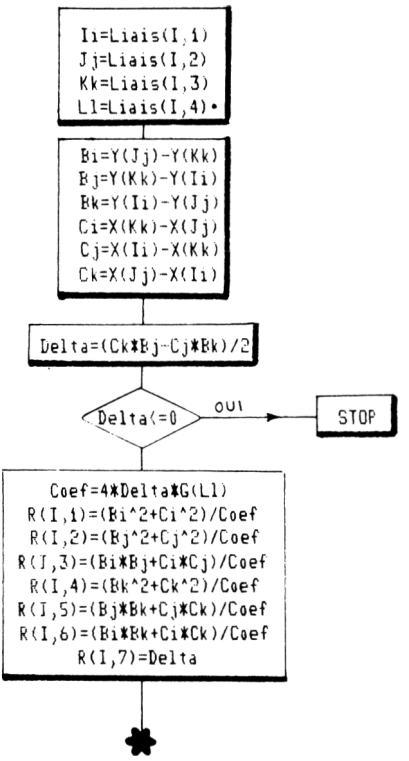


Fig. 81. - Organigramme du sous-programme 'Format'.

Listing du sous-programme 'Format' :

```
2910  ! ******************************************************************
2920  SUB Format(I)
2930  ! ******************************************************************
2940  !
2950  ! Appelé par Prog. Princ.
2960  !
2970  OPTION BASE 1
2980  !
2990  ! Calcul des éléments pour la matrice de rigidité
3000  !
3010  COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul
3020  COM Titre$[80]
```

```
3030  COM X(100),Y(100),G(5)
3040  COM INTEGER Liais(200,4),Isup(100)
3050  !
3060  COM Ndlb,Nn,Ntot
3070  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(201)
3080  COM A(5150),R(200,7)
3090  !
3100  Ii=Liais(I,1)
3110  Jj=Liais(I,2)
3120  Kk=Liais(I,3)
3130  Ll=Liais(I,4)
3140  Bi=Y(Jj)-Y(Kk)
3150  Bj=Y(Kk)-Y(Ii)
3160  Bk=Y(Ii)-Y(Jj)
3170  Ci=X(Kk)-X(Jj)
3180  Cj=X(Ii)-X(Kk)
3190  Ck=X(Jj)-X(Ii)
3200  Delta=(Ck*Bj-Cj*Bk)/2
3210  IF Delta>0 THEN 3240
3220  PRINT "ERREUR ELEMENT : Surface négative ou nulle  ";I
3230  STOP
3240  Coef=4*Delta*G(Ll)
3250  R(I,1)=(Bi^2+Ci^2)/Coef
3260  R(I,2)=(Bj^2+Cj^2)/Coef
3270  R(I,3)=(Bi*Bj+Ci*Cj)/Coef
3280  R(I,4)=(Bk^2+Ck^2)/Coef
3290  R(I,5)=(Bj*Bk+Cj*Ck)/Coef
3300  R(I,6)=(Bi*Bk+Ci*Ck)/Coef
3310  R(I,7)=Delta
3320  !
3330  SUBEXIT
3340  SUBEND
```

6.7 - LE SOUS-PROGRAMME 'Matrig'

Il ne fait que récupérer les valeurs des coefficients de la matrice de rigidité dans 'R', et il a été conservé afin de ne pas changer l'organisation générale du sous-programme 'Assemb'. Son listing est reproduit ci-dessous :

```
4190  ! ******************************************************************
4200  SUB Matrig(R(*),Rig(*),Ndl,Nnelem,I)
4210  ! ******************************************************************
4220  !
4230  ! Appelé par Assemb
4240  !
4250  OPTION BASE 1
4260  !
```

```
4270  ! Calcul de la matrice de rigidité de la barre sous la forme :
4280  !
4290  ! Rig(1)  Rig(3)  Rig(6) ....
4300  !         Rig(2)  Rig(5) ....
4310  !                 Rig(4) ....
4320  !
4330  FOR J=1 TO 6
4340      Rig(J)=R(I,J)
4350  NEXT J
4360  !
4370  SUBEXIT
4380  SUBEND
```

6.8 - GÉNÉRATION DU SECOND MEMBRE

Le second membre est généré à l'aide du sous-programme 'Second' au cours d'une boucle sur les éléments. Le sous-programme 'Genererdepl' est conservé afin d'annuler les coefficients second membre correspondant aux nœuds situés sur le contour.

Listing du sous-programme 'Second' :

```
4890  ! ******************************************************************
4900  SUB Second
4910  ! ******************************************************************
4920  !
4930  ! Appelé par Prog. Princ.
4940  ! Appelle : Genererdepl
4950  !
4960  OPTION BASE 1
4970  !
4980  ! Formation du second membre
4990  !
5000  COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul
5010  COM Titre$[80]
5020  COM X(100),Y(100),G(5)
5030  COM INTEGER Liais(200,4),Isup(100)
5040  !
5050  COM Ndlb,Nn,Ntot
5060  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(201)
5070  COM A(5150),R(200,7)
5080  !
5090  DIM D(200)
5100  !
5110  Indice=Maxa(Nn+1)-1
5120  !
```

```
5130  FOR I=1 TO Nelem
5140      Ii=Liais(I,1)
5150      Jj=Liais(I,2)
5160      Kk=Liais(I,3)
5170      Delta=2*R(I,7)/3
5180      A(Indice+Ii)=A(Indice+Ii)+Delta
5190      A(Indice+Jj)=A(Indice+Jj)+Delta
5200      A(Indice+Kk)=A(Indice+Kk)+Delta
5210  NEXT I
5220  !
5230  ! Modification second membre et sauvegarde charge nodale appuis
5240  !
5250  CALL Genererdepl(Indice,Nn,Ndlb,D(*),A(*),Iappui(*),Maxa(*))
5260  !
5270  SUBEXIT
5280  SUBEND
```

6.9 - CALCUL DES CONTRAINTES DE CISAILLEMENT ET DE L'INERTIE DE TORSION

Les composantes des contraintes de cisaillement s'expriment en fonction des valeurs trouvées pour le déplacement de la membrane par :

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} c_i & c_j & c_k \\ -b_i & -b_j & -b_k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix}$$

L'organigramme en est donné figure 82.

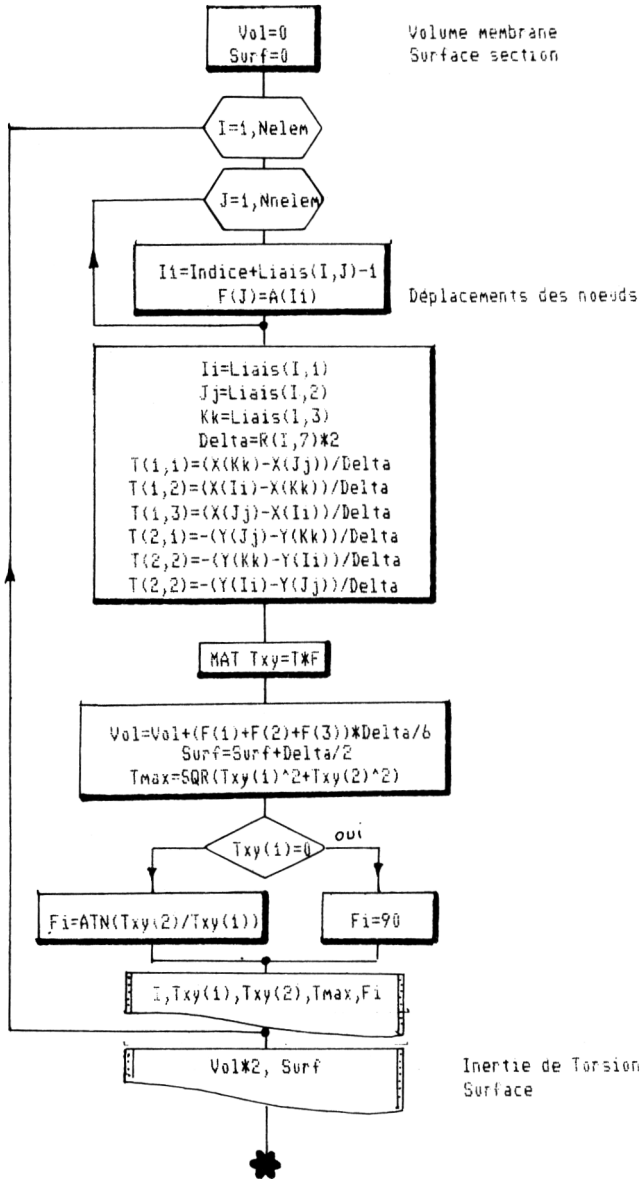


Fig. 82. - Organigramme du sous-programme 'Effn'.

Le listing est reproduit ci-dessous.

```
7230  ! ************************************************************
7240  SUB Effn(Indice,Ichar)
7250  ! ************************************************************
7260  !
7270  ! Appelé par Prog. Princ.
7280  !
7290  OPTION BASE 1
7300  !
7310  ! Calcul et impression des contraintes dans le éléments
7320  !
7330  COM Nnoeuds,Nelem,Nchar,Ndl,Nnelem,Nmodul
7340  COM Titre$[80]
7350  COM X(100),Y(100),G(5)
7360  COM INTEGER Liais(200,4),Isup(100)
7370  !
7380  COM Ndlb,Nn,Ntot
7390  COM INTEGER Iappui(50),Maxa(201)
7400  COM A(5150),R(200,7)
7410  !
7420  DIM T(2,3),F(3),Txy(2)
7430  DEG
7440  PRINT LIN(1)
7450  PRINT " C O N T R A I N T E S   D E   C I S A I L L E M E N T"
7460  PRINT
7470  PRINT " N° Elem       Tx              Ty              Tmax            Fi"
7480  PRINT
7490  Vol=0
7500  Surf=0
7510  FOR I=1 TO Nelem
7520      FOR J=1 TO Nnelem
7530          Ii=Indice+Liais(I,J)-1
7540          F(J)=A(Ii)
7550      NEXT J
7560      Ii=Liais(I,1)
7570      Jj=Liais(I,2)
7580      Kk=Liais(I,3)
7590      Delta=R(I,7)*2
7600      T(1,1)=(X(Kk)-X(Jj))/Delta
7610      T(1,2)=(X(Ii)-X(Kk))/Delta
7620      T(1,3)=(X(Jj)-X(Ii))/Delta
7630      T(2,1)=-(Y(Jj)-Y(Kk))/Delta
7640      T(2,2)=-(Y(Kk)-Y(Ii))/Delta
7650      T(2,3)=-(Y(Ii)-Y(Jj))/Delta
7660      MAT Txy=T*F
7670      Vol=Vol+(F(1)+F(2)+F(3))*Delta/6
7680      Surf=Surf+Delta/2
7690      Tmax=SQR(Txy(1)^2+Txy(2)^2)
7700      Fi=90
7710      IF Txy(1)=0 THEN 7730
```

```
7720      Fi=ATN(Txy(2)/Txy(1))
7730      PRINT USING 7740;I,Txy(1),Txy(2),Tmax,Fi
7740      IMAGE 3X,DDD,3(4X,MD.DDDDE),4X,MDDD.DD
7750  NEXT I
7760  PRINT LIN(2)
7770  PRINT "     INERTIE A LA TORSION = ";Vol*2
7780  PRINT
7790  PRINT "     SURFACE..............= ";Surf
7800  SUBEXIT
7810  SUBEND
```

6.10 - EXEMPLE : SECTION CIRCULAIRE

La figure 83 représente la modélisation d'une section circulaire pleine en 108 éléments triangulaires.

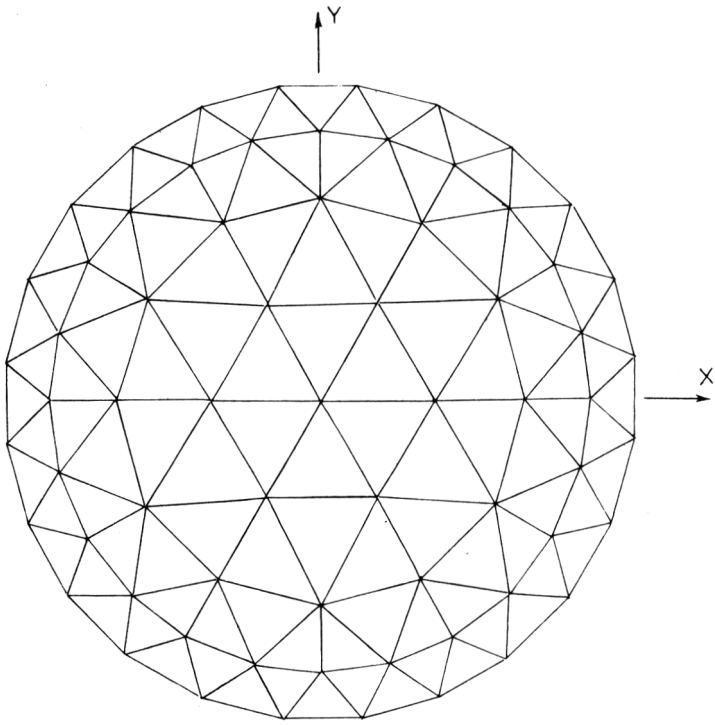


Fig. 83. - Section circulaire pleine.

L'inertie de torsion est 3629.921, et les contraintes maximales au bord varient, entre 6.87 et 6.07 suivant le triangle considéré. L'inertie et la contrainte maximale exactes sont respectivement 3771.418 et 7.

Dans le cas où la section n'est pas simplement connexe, on peut prendre en compte les parties creuses en affectant les éléments correspondants d'un module G de l'ordre de 0.001 fois le module du matériau environnant. Pour la même section avec une partie intérieure creuse (fig. 84), on obtient les résultats ci-dessous :

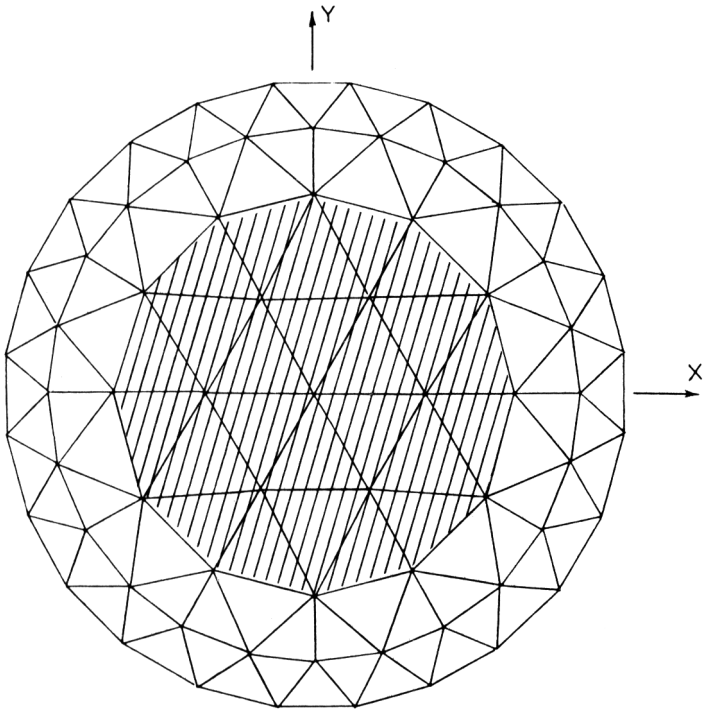


Fig. 84. - Section circulaire creuse.

TITRE : Test inertie de torsion d'une section circulaire creuse

Nombre de noeuds = 67
Nombre d'éléments= 108
Nombre de modules d'élasticité = 2

COORDONNEES DES NOEUDS

N°	X	Y	Code appui
1	6.940	.914	1
2	6.467	2.679	1
3	5.553	4.261	1
4	4.261	5.553	1
5	2.679	6.467	1
6	.914	6.940	1
7	-.914	6.940	1
8	-2.679	6.467	1
9	-4.261	5.553	1
10	-5.553	4.261	1

DEFINITION DES ELEMENTS

Elément	I	J	K	N° Module
1	24	1	25	1
2	25	1	26	1
3	1	2	26	1
4	26	2	27	1
5	2	3	27	1
6	27	3	28	1
7	3	4	28	1
8	28	4	29	1
9	4	5	29	1
10	29	5	30	1
100	66	59	60	2
101	66	60	61	2
102	61	60	49	2
103	67	61	62	2
104	67	62	63	2
105	67	63	64	2
106	67	64	65	2
107	67	65	66	2
108	67	66	61	2

MODULES D'ELASTICITE

Module G N° 1 = 1
Module G N° 2 = .001

C O N T R A I N T E S D E C I S A I L L E M E N T

N° Elem	Tx	Ty	Tmax	Fi
1	0.0000E+00	6.7432E+00	6.7432E+00	90.00
2	-7.1758E-01	6.0458E+00	6.0882E+00	-83.23
3	-1.7788E+00	6.6384E+00	6.8726E+00	-75.00
4	-2.4014E+00	5.5947E+00	6.0883E+00	-66.77
5	-3.3716E+00	5.8399E+00	6.7433E+00	-60.00
103	-7.2169E-04	1.2500E-03	1.4434E-03	-60.00
104	-1.4434E-03	4.0000E-11	1.4434E-03	-.00
105	-7.2169E-04	-1.2500E-03	1.4434E-03	60.00
106	7.2169E-04	-1.2500E-03	1.4434E-03	-60.00
107	1.4434E-03	0.0000E+00	1.4434E-03	0.00
108	7.2169E-04	1.2500E-03	1.4434E-03	60.00

INERTIE A LA TORSION = 3074.25485598

SURFACE.....= 152.185598519

7 ANNEXES

7.1 - ALTERNATIVE CONCERNANT LES CONDITIONS AUX LIMITES

L'option choisie pour prendre en compte les conditions d'appuis (ou conditions aux limites) a le mérite de la simplicité : on ne modifie pas la numérotation des degrés de liberté, qui se déduit de l'ordre naturel d'introduction des nœuds de la structure. Cette façon de faire a néanmoins trois inconvénients.

Le premier, mineur, provient du fait que la taille du système linéaire n'est pas réduite et les zéros placés sur les lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté sont effectivement traités lors de la procédure de résolution.

Le deuxième a des répercussions sur l'organisation générale du programme.

En effet, on peut distinguer deux phases bien distinctes : la première concerne la structure, la deuxième concerne les charges. La jonction de ces deux phases se fait au milieu de la procédure 'Solve' : la triangularisation peut être menée sans connaître les charges appliquées. Or, dans la méthode exposée dans l'ouvrage, on a besoin des coefficients de la matrice correspondant aux degrés de liberté bloqués pour générer les chargements provenant des déplacements d'appui, et après l'appel du sous-programme 'Modif',

ces coefficients sont détruits. Or il est économique d'effectuer la factorisation, de conserver la matrice triangularisée en mémoire, puis de résoudre ensuite pour autant de chargements que souhaité. Cela nécessite un réarrangement des lignes et des colonnes du système linéaire en fonction de la nature des degrés de liberté.

Le troisième inconvénient concerne le calcul des réactions d'appui. Le fait d'interroger chaque nœud de chaque élément pour savoir si il contribue à une réaction d'appui est une démarche non déterministe, peu satisfaisante par les opérations inutiles qu'elle engendre.

On peut donc commencer par renuméroter les degrés de liberté suivant qu'ils correspondent à des appuis ou non. La matrice du système linéaire est alors partitionnée en quatre sous-matrices, ainsi que l'illustrent les figures 85 et 86.

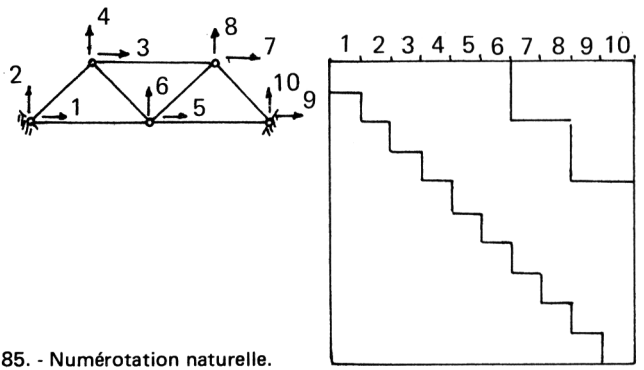


Fig. 85. - Numérotation naturelle.

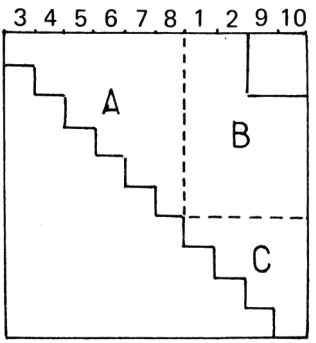


Fig. 86. - Après réarrangement.

Seule la sous-matrice 'A' est factorisée, et, si on appelle 'd' le vecteur des déplacements imposés, 'δ' le vecteur des déplacements inconnus, 'F_l' et 'F_b' les forces nodales correspondant aux degrés de liberté libres et bloqués et 'R' les réactions d'appuis, on a, d'une manière formelle :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_l \\ F_b + R \end{bmatrix}$$

d'où :

$$A\,\delta = F_l - Bd$$

$$R = {}^tB\,\delta + Cd - F_b$$

Les différentes sous-matrices peuvent être soit rangées dans le même tableau soit dans deux tableaux différents, l'un réservé à 'A' et l'autre à 'B' et 'C'.

7.2 - INDICATIONS SUR LES ESPACES MÉMOIRE NÉCESSAIRES

Ainsi qu'il a été dit, les programmes présentés ont été mis au point sur micro-ordinateur HP 9845, avec un BASIC interprété. Les résultats donnés dans ce paragraphe concernant les encombrements mémoire n'ont qu'une valeur relative.

Les différents types de variables utilisés nécessitent les espaces mémoire suivants exprimés en octets (1 octet = 8 positions binaires)

Variable simple	Octets
Réél	10
Entier	4
Chaîne de caractères	6 + 1 par caractère.

Tableaux	Octets
Rééls	10 + 4 par dimension + 8 par nombre
Entiers	10 + 4 par dimension + 2 par nombre
Chaînes de caractères	12 + 4 par dimension + 2 par caractère + nombre de caractères de chaque chaîne

Le tableau (fig. 87) donne l'encombrement mémoire pour les quatres programmes présentés.

PROGRAMME	OSSAT	POUTR	LSTCT	ITRSN
Nombre de nœuds	200	200	100	100
Nombre d'éléments	400	200	200	200
Nombre total de lignes	1086	1119	1104	781
Nombre de lignes commentaires	427	396	437	339
Taille mémoire (Kilo-Octets)	145	123.2	110.6	85.2
Commentaires (Kilo-Octets)	13.2	12.6	13.3	10.8

Fig. 87. - Taille mémoire et dimensions.

7.3 - RÉFÉRENCES ET SOURCES

– **Mathématiques**

Pour la résolution du système linéaire, noyau mathématique des problèmes traités, nous nous sommes inspiré de l'ouvrage :

• *Numerical analysis in the finite element method* (Prentice Hall), des professeurs KLAUSS-JURGEN BATHE et EDWARD L. WILSON.

En particulier, la numérotation des coefficients de la matrice 'A' est celle exposée dans cet ouvrage.

On pourra trouver des développements analogues dans l'ouvrage français

• *Une présentation de la méthode des éléments finis* (Maloine Ed.), des professeurs GOURI DHATT et GILBERT TOUZOT.

Ces deux livres traitent également de la génération des éléments isoparamétriques et des problèmes dynamiques. Des sous-programmes en FORTRAN sont donnés.

– **Théorie de l'élasticité**

Les rappels concernant la formulation de l'élément triangulaire à champ de déplacement linéaire en élasticité plane sont inspirés du livre :

• *La méthode des éléments finis* (Ediscience), du professeur D. C. ZIENKIEWICZ

– **Résistance des Matériaux**

Pour le problème de la torsion et une éventuelle adaptation du programme au calcul des sections réduites des poutres, on se reportera à l'ouvrage de référence :

• *Résistance des matériaux* (Ed. Dunod), de J. COURBON.

De nombreuses formules relatives aux matrices de rigidité des poutres en flexion se trouvent dans l'ouvrage :

• *Analysis of framed structures* (Van Nostrand), des professeurs JAMES M. GERE et WILLIAM WEAVER Jr.

Imprimerie de la Manutention à Mayenne
Dépôt légal : Mars 1984
N° d'Éditeur : 4076

LES DOSSIERS DE LA CONSTRUCTION

A l'heure où la micro-informatique pénètre les bureaux d'études les plus modestes, et où les Ecoles d'Ingénieurs enseignent le calcul des structures, cet ouvrage est consacré à la présentation d'un programme utilisant la méthode des déplacements.

Les sujets traités (ossatures planes ou spatiales, poutres continues, élasticité plane, torsion) ne sont que les différentes facettes d'un même problème, et, moyennant quelques modifications mineures ce programme pourra être utilisé pour le calcul des dalles, des portiques, des coques et des problèmes de champ en régime permanent : il suffira de modifier les matrices de rigidité correspondantes.

La résolution du système linéaire, dont les coefficients sont rangés en utilisant la méthode de la ligne-de-ciel, ainsi que la diversité des chargements pris en compte confèrent au programme un aspect dépassant le cadre des exercices scolaires d'initiation.

Le BASIC, langage de programmation utilisé, est suffisamment transparent pour permettre une traduction aisée en FORTRAN ou en PASCAL. De nombreux commentaires inclus dans le programme contribuent à sa bonne compréhension.

EYROLLES

3714

EYROLLES

CALCUL DES STRUCTURES EN BASIC

B.ASANCHEYEV